Devoir de Logique de Base, L2 Informatique

Le 8 Juin 2009

Ce devoir est à rendre à Mme. Ruggeri, la secretaire du L_2, le 19 juin à midi au plutard. Tout résultat énoncé en cours ou en TD peut être utilisé sans besoin de le démontrer à nouveau.

Exercice 1

Dans cet exercise, on s'interesse à une notation des formules propositionnelles où toutes les parenthèses sont supprimées, sans pour autant créer des ambiguïté. Cette notation est dite préfixe, ou notation polonaise. L'ensemble des formules en notation polonaise (noté ANP) est définit inductivement de la manière suivante :

(a) Toute lettre propositionnelle est une ANP ; aussi, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{F}$ sont des ANP ; il s'agit ici des ANP atomiques.

(b) Si A est une ANP alor $\neg A$ est une ANP.

(c) Si A et G sont deux ANP et $*$ est un connecteur binaire, alors : $*AG$ est une ANP

Pour toute formule propositionnelle A, on note ici $pol(A)$ la formule correspondante en notation polonaise (l'élèment de ANP qui lui est associé). La définition de $pol(A)$ est donc à nouveau inductive :

- $pol(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$
- $pol(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$
- $pol(p) = p$ pour toute variable propositionnelle p.
- $pol(\neg A) = \neg pol(A)$
- $pol(A * G) = *pol(A)pol(G)$

1. Écrire les formules suivantes en notation polonaise :
   - $(p \vee ((q \wedge (\neg r)) \to p))$
   - $((p \to (q \vee r)) \vee (\neg(r \to w)))$
2. On définit une fonction K qui associe à tout symbole de l'alphabet d'un langage propositionnel, une valeur dans l'ensemble $0, 1, -1$:
   - $K(\mathcal{V}) = \mathcal{K}(\mathcal{F}) = -1$;
   - $K(p) = -1$ pour toute lettre propositionnelle p ;
   - $K(\neg) = 0$;
   - $K(\vee) = K(\wedge) = K(\to) = K(\leftrightarrow) = +1$.

   Si S est une suite de symboles $s_1, ..., s_n$, on définit le poid de S, noté $Po(S)$, par :

   $$Po(S) = K(s_1) + ... + K(s_n)$$

   i. Montrer, par récurrence, que pour toute $ANP\ A$, $Po(A) = -1$.

   ii. En utilisant le résultat de la question (i), déterminer si les expressions suivantes sont des ANP. Si oui, donner la formule propositionnelle (classique) correspondante.
   - $\neg \to pqr \vee pq\neg r$
   - $\to\to pq \to\to qr \to \neg pr$
   - $\vee \wedge \vee\neg p\neg qr \wedge \vee pr \vee \neg r\neg p.$

Exercice 2

1. Montrer que dans le cas général, $B \to A$ n'est pas une conséquence logique de $A \to B$.
2. Montrer que $(\neg A \to \neg B) \to A$ est toujours une conséquence logique de $\neg A \to B$.

Exercice 3

Dans cette exercice on considère trois interrupteurs I_1, I_2 et I_3 et une lampe P. Chaque interrupteur peut être dans deux états différents ON ou OFF. Initialement, tous les interrupteurs sont à l'état OFF et la lampe est éteinte. A partir de cet état initial, si un seul interrupteur, à la fois, change d'état alors ceci se repercute sur la lampe qui, à son tour, change d'état : si la lampe était éteinte alors elle s'allume et réciproquement.

1. Formuler ce problème dans la logique propositionnelle en dressant la table de vérité correspondante.
2. Écrire la formule propositionnelle et tracer le circuit correspondant (se reporter à l'exercice 8 vu dans le TD1).

Exercice 4

Pour chacun des ensembles de formules suivants, utiliser la méthode des tableaux pour déterminer s'il est satisfiable ou pas. S'il est satisfiable, indiquer ses modèles.

1. $E_1 = \{p \wedge (q \vee r),\ (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg r)\}$
2. $E_2 = \{(q \vee \neg r),\ (r \vee \neg p) \wedge (p \vee s)\}$

Exercice 5

Utilisez les tableaux pour prouver la validité de la formule :

$$(p \wedge (q \vee r)) \ \rightarrow ((p \vee r) \wedge (p \vee q))$$