Université d'Evry Val d'Essonne, Master Informatique et Systèmes

# Génie Logiciel 2
# TD 2 : Relations entre LTS

Tarek Melliti & Pascal Poizat

2011-2012

---

**Exercice - 1** *Pré-ordre et équivalence de traces et d'échecs*

---

**1-** Donnez pour chaque ensemble de traces $T$ ci-dessous un processus $P$ qui les génère. Si c'est impossible, expliquez pourquoi. On supposera que les éléments de l'alphabet sont les lettres individuelles ($a$, $b$, ...).
$\{\epsilon, a, aa, aaa, aaaa, ...\}$, $\{\epsilon, a, ab, ac\}$, $\{\epsilon, a, ab, cd, bc\}$, $\{\epsilon, a, ab, abb, abbc, abbcb, abbcbb, abbcbbc, ...\}$, $\{\epsilon, abcd, acbd, acdb, cabd, cadb, cdab\}$ (pour ce dernier cas, $T \subset trace(P)$).

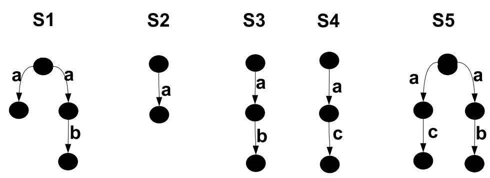


FIGURE 1 – Cinq LTS

**2-** Soient les cinq LTS de la Figure 1. Ordonnez ces LTS selon le pré-ordre de traces ($\sqsubseteq_T$).
(justifiez votre réponse en donnant les ensembles de traces)

**3-** Faites de même avec le pré-ordre d'échecs ($\sqsubseteq_F$).
(justifiez votre réponse en donnant les ensembles d'échecs)

---

**Exercice - 2** *correction*

---

**1-**

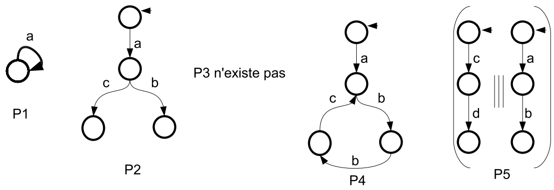


FIGURE 2 – les différents LTS correspondant aux traces

**2- Les traces des systèmes :**

- $Trace(S1) = \{\epsilon, a, ab\}$
- $Trace(S2) = \{\epsilon, a\}$
- $Trace(S3) = \{\epsilon, a, ab\}$
- $Trace(S4) = \{\epsilon, a, ac\}$
- $Trace(S5) = \{\epsilon, a, ab, ac\}$

**Les échecs des systèmes :**

- $Echec(S1) = \{\langle\epsilon, \{b, c\}\rangle, \langle a, \{a, b, c\}\rangle, \langle a, \{a, c\}\rangle, \langle ab, \{a, b, c\}\rangle\}$
- $Echec(S2) = \{\langle\epsilon, \{b, c\}\rangle, \langle a, \{a, b, c\}\rangle\}$
- $Echec(S3) = \{\langle\epsilon, \{b, c\}\rangle, \langle a, \{a, c\}\rangle, \langle ab, \{a, b, c\}\rangle\}$
- $Echec(S4) = \{\langle\epsilon, \{b, c\}\rangle, \langle a, \{a, b\}\rangle, \langle ac, \{a, b, c\}\rangle\}$
- $Echec(S5) = \{\langle\epsilon, \{b, c\}\rangle, \langle a, \{a, b\}\rangle, \langle a, \{a, c\}\rangle, \langle ac, \{a, b, c\}\rangle, \langle ab, \{a, b, c\}\rangle\}$

**Préordre de Trace :**

$\forall Si, Si \leq_T Si$
$S2 \leq_T Si$, pour $i = 1 \ldots 5$
$S1 \leq_T S5$, $S1 \leq_T S3$, $S3 \leq_T S1$ ($S1 \simeq S3$)
$S3 \leq_T S5$, $S4 \leq_T S5$

**Préordre d'Echec :**

$\forall Si, Si \leq_F Si$
$S2 \leq_F S1$, $S2 \leq_F S3$, $S2 \leq_F S4$, $S2 \leq_F S5$
$S1 \leq_F S3$, $S1 \leq_F S5$

---

**Exercice -** 3 *Bissimulation forte*

---

**1-** Soient les sept LTS de la Figure 3. Indiquez pour chaque paire de LTS s'ils sont bissimilaires.
(s'ils le sont, donnez la relation de bissimulation, sinon expliquez pourquoi)

---

**Exercice -** 4 *correction*

---

Pour corriger cet exercice on va prendre deux cas ; un cas de bisimulation et un cas de non bisimulation. Pour le reste on annoncera les résultats sans faire la preuve. Notre objectif est de construire une relation de bisimulation contenant les états initiaux des deux systèmes. On va démontrer la bisimulation comme vu en cours c à d en supposant que les état initiaux le sont et on propage les conséquence. Les conséquences sont obtenu par l'application de la définition de la bisimulation (voir cours slide 143). Chaque étape de la preuve est composé d'une formule sur la bisimulation sur des état et une relation qui contient les hypothèse déjà traité. Trois cas sont possibles pour une étape donné :

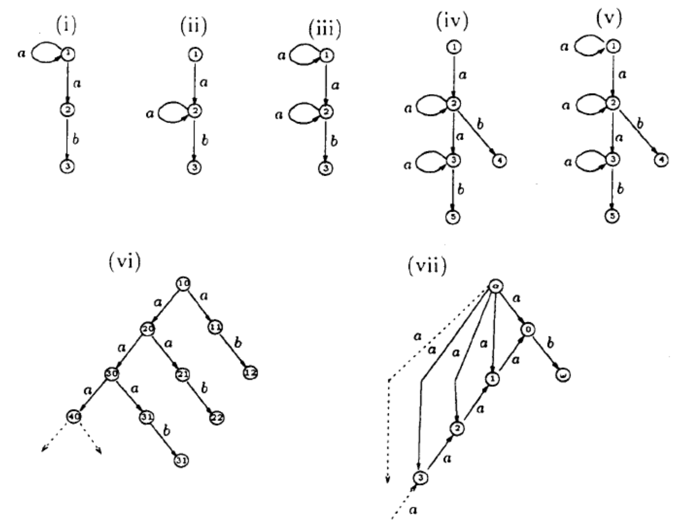


FIGURE 3 – Sept LTS

– le FAUX apparait dans la propagation (pas unification possible d'une des variables) et donc les systèmes ne sont pas bisimilaire.
– On a fini la propagation sans passer par une contradiction et il y a rien à examiner. Les systèmes sont alors bisimilaires.
– On a des cas à examiner qui sont dans la relation (déjà examiné). Les système sont bisimilaires.

**cas du système (i) et (ii)** ici on utilisera $pi$ pour désigner les états de (i) et $qj$ celles de (ii) :

| | |
|---|---|
| $p1 \overset{?}{\sim} q1$ et $R = \emptyset$ | pour $p1 \overset{a}{\to} p1, \exists x, q1 \overset{a}{\to} x \wedge x \sim p1$<br>et pour $p1 \overset{a}{\to} p2, \exists y, q1 \overset{a}{\to} y \wedge y \sim p2$<br>et pour $q1 \overset{a}{\to} q2, \exists z, p1 \overset{a}{\to} z \wedge z \sim q2$<br>les unifications possible des variables est : $x = q2 \wedge y = q2 \wedge (z = p1 \vee z = p2)$<br>La preuve de la bisimulation entre $p1$ et $q1$ revient à propager les hypothèses générées par les unifications possibles des variables $x, y, z$ |
| $(p1 \overset{?}{\sim} q2 \wedge p2 \overset{?}{\sim} q2) \wedge$<br>$(p1 \overset{?}{\sim} q2 \vee p2 \overset{?}{\sim} q2)$<br>avec $R = \{(p1, q2)\}$ | la nouvelle formule est de la forme $(A \wedge B \wedge (A \vee B))$ ce qui est équivalent à $A \wedge B$<br>donc pour prouver la bisimulation entre $p1$ et $q1$ revient à prouver la bisimulation entre $p1$ et $q2$ et la bisimulation entre $p2$ et $q2$ avec dans $R$ il y a $p1$ et $q1$. |
| $\underline{p1 \overset{?}{\sim} q2} \wedge p2 \overset{?}{\sim} q2$ | on commence par développer $p1 \overset{?}{\sim} q2$<br>pour $p1 \overset{a}{\to} p1, \exists x, q2 \overset{a}{\to} x \wedge x \sim p1$<br>et pour $p1 \overset{a}{\to} p2, \exists y, q1 \overset{a}{\to} y \wedge y \sim p2$<br>et pour $q2 \overset{a}{\to} q2, \exists z, p1 \overset{a}{\to} z \wedge z \sim q2$<br>et pour $q2 \overset{b}{\to} q3, \exists t, p1 \overset{b}{\to} t \wedge t \sim q3$<br>les unifications possible des variables est : $x = q2 \wedge y = q2 \wedge (z = p1 \vee z = p2) \wedge t = \emptyset$<br>on remarque ici que $t$ est non unifiable donc on a $p1 \not\sim q2$ ce qui implique que<br>$p1 \overset{?}{\sim} q2 \wedge p2 \overset{?}{\sim} q2$ est $FAUX$<br>et puisqu'on a $(p1 \overset{?}{\sim} q2 \wedge p2 \overset{?}{\sim} q2) \Leftrightarrow p1 \overset{?}{\sim} q1$<br>alors on a $p1 \not\sim q1$ |

**cas du système (i) et (iv)** ici on utilisera $pi$ pour désigner les états de (i) et $qi$ celles de (iv) :

| | |
|---|---|
| $p1 \overset{?}{\sim} q1$ et $R = \emptyset$ | pour $p1 \overset{a}{\to} p2, \exists x, q1 \overset{a}{\to} x \wedge x \sim p1$<br>et pour $q1 \overset{a}{\to} q2, \exists y, p1 \overset{a}{\to} y \wedge y \sim q2$<br>les unifications possible des variables sont : $x = q2 \wedge y = p2$ |
| $(p2 \overset{?}{\sim} q2 \wedge p2 \overset{?}{\sim} q2)$<br>avec $R = \{(p1, q1)\}$ | ce qui revient à |
| $p2 \overset{?}{\sim} q2$ avec $R = \{(p1, q1)\}$ | pour $p2 \overset{a}{\to} p2, \exists x, q2 \overset{a}{\to} x \wedge x \sim p2$<br>et pour $p2 \overset{b}{\to} p3, \exists y, q2 \overset{b}{\to} y \wedge y \sim p3$<br>et pour $q2 \overset{a}{\to} q2, \exists z, p2 \overset{a}{\to} z \wedge z \sim q2$<br>et pour $q2 \overset{a}{\to} q3, \exists t, p2 \overset{a}{\to} t \wedge t \sim q3$<br>et pour $q2 \overset{b}{\to} q4, \exists v, p2 \overset{b}{\to} v \wedge v \sim q4$<br>les unifications possible des variables sont : $(x = q2 \vee x = q3) \wedge$<br>$y = q4 \wedge z = p2 \wedge t = p2 \wedge v = p3$ |
| $(p2 \overset{?}{\sim} q2 \vee p2 \overset{?}{\sim} q3) \wedge$<br>$p3 \overset{?}{\sim} q4 \wedge p2 \overset{?}{\sim} q2 \wedge$ | la relation $R$ contient $(p2, q2)$ donc on la considère comme vrai et<br>on propage rien venant de $p2$ et $q2$.<br>Après simplification on obtient |
| $p2 \overset{?}{\sim} q3 \wedge \underline{p3 \overset{?}{\sim} q4}$ avec<br>$R = \{(p1, q1), (p2, q2)\}$ | on remarque que les états p3 et q4 sont des états sans transition donc<br>on propage rien on les rajoute simplement dans $R$ |
| $p2 \overset{?}{\sim} q3$ avec<br>$R = \{(p1, q1), (p2, q2),$<br>$(p3, q4), \}$ | ici on développe p2 et q3 :<br>pour $p2 \overset{a}{\to} p2, \exists x, q3 \overset{a}{\to} x \wedge x \sim p2$<br>et pour $p2 \overset{b}{\to} p3, \exists y, q3 \overset{b}{\to} y \wedge y \sim p3$<br>et pour $q3 \overset{a}{\to} q3, \exists z, p2 \overset{a}{\to} z \wedge z \sim q3$<br>et pour $q3 \overset{b}{\to} q5, \exists t, p2 \overset{b}{\to} t \wedge t \sim q5$<br>les unifications possible des variables sont : $x = q3 \wedge$<br>$y = q5 \wedge z = p2 \wedge t = p3$. Ce qui revient à |
| $p2 \overset{?}{\sim} q3 \wedge p3 \overset{?}{\sim} q5 \wedge$<br>$p2 \overset{?}{\sim} q3 \wedge p3 \overset{?}{\sim} q5$ avec<br>$R = \{(p1, q1), (p2, q2),$<br>$(p3, q4), (P3, q3)\}$ | on a $(p2, q3)$ dans $R$ et on procède a une simplification<br><br>ce qui revient à |
| $p3 \overset{?}{\sim} q5$<br>$R = \{(p1, q1), (p2, q2),$<br>$(p3, q4), (p2, q3)\}$ | les deux état $p3$ et $q5$ n'ont aucune transition ce qui fait<br>qu'on propage rien et on les rajoute dans $R$ |
| $TRUE$ avec<br>$R = \{(p1, q1), (p2, q2), (p3, q4)$<br>$, (p2, q3), (p3, q5)\}$ | |
| | on a aucune formule à prouver et on a rencontré aucune contradiction<br>on peut déduire que $R \subset \sim$ et puisqu'elle contient les état initiaux<br>des deux systèmes donc,<br>**=>les deux système sont bisimilaire**.<br>Puisque $\sim$ est une relation d'équivalence on peut rajouter par<br>la fermeture transitive que :<br>$q2 \sim q3$, $q5 \sim q4$ et aussi l'identité $pi \sim pi$, $qj \sim qj$ pour $i = 1...3$ et $j = 1...5$ |

Pour les autres systèmes on a :
- (iii) $\sim$ (v)
- (i) $\sim$ (vi) : le (vi) est ce qu'on appel l'arbre d'exécution du système (i). On peut construire une relation de bisimulation entre eux comme suit (en désignant par $pi$ les état du (i) et $qi$ les état du (vi)) : $\forall x, y, z \in \mathbb{N}^* R = \{(p1, qx0), (p2, qy1), (p3, qz2)\}$
- Le système (vii) n'admet pas un système fini.

**Exercice -** 5 *Bissimulation faible*

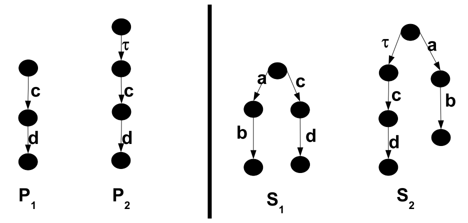


FIGURE 4 – Quatre LTS

**1-** Soient les quatre LTS de la Figure 4. Dites si les LTS $P_1$ et $P_2$ sont faiblement bissimilaires.
(s'ils le sont, donnez la relation de bissimulation faible, sinon expliquez pourquoi)

**2-** Écrivez, en utilisant les opérations sur les LTS vues en cours, $S_1$ et $S_2$ en fonction de $P_1$ et $P_2$.

**3-** Dites si $S_1$ et $S_2$ sont faiblement bissimilaires.
(s'ils le sont, donnez la relation de bissimulation faible, sinon expliquez pourquoi)

**4-** Expliquez ce que vous pouvez (ou non) en déduire concernant la congruence de la bissimilarité faible.

**5-** (avancé) Expliquez la modification à apporter à la définition de la bissimulation faible pour obtenir une relation congruente (que l'on note $\approx^C$).

**Exercice -** 6 *correction*

La preuve de bisimulation faible est similaire à celle de la forte. Au lieu de comparer les systèmes entre eux on compare les systèmes avec l'observateur de l'autre. Soit un LTS ($L = \langle S, A, T, I\rangle$) on peut construire sur les mêmes états de $L$ son observateur noté $L^{\Rightarrow} = \langle S, A, T', I\rangle$ avec :
$T' = \{(s, \epsilon, s) | s \in S\} \bigcup \{(s, a \in A \setminus \{\tau\}, s') | \exists t \in A^*, OBS(t) = a \wedge s \xrightarrow{t} s'\}$

La figure 5 représente les deux systèmes et leur observateur ainsi que le sens de la comparaison. **1-**

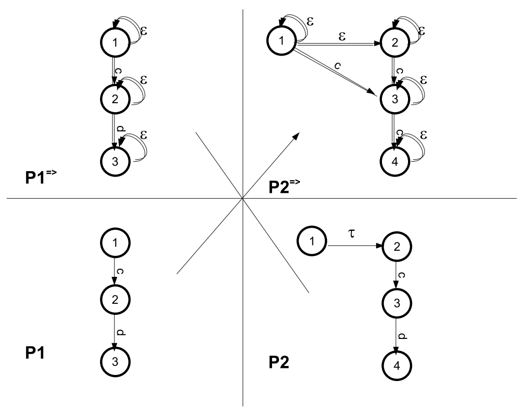


FIGURE 5 – P1 et P2 et leurs observateurs

**2-** voici la preuve de la faible bisimulation entre $P1$ et $P2$ on désignera les états de $P1$ par $pi$ et $P2$ par des $qi$ :

| | |
|---|---|
| $p1 \overset{?}{\approx} q1$ et $R = \emptyset$ | pour $p1 \xrightarrow{c} p2, \exists x, q1 \overset{c}{\Rightarrow} x \wedge x \approx p2$ <br> et pour $q1 \xrightarrow{\tau} q2, \exists y, p1 \overset{\epsilon}{\Rightarrow} y \wedge y \approx q2$ <br> les unifications possible des variables sont : $x = q3 \wedge y = p1$ |
| $p2 \overset{?}{\approx} q3 \wedge \underline{p1 \overset{?}{\approx} q2}$ <br> avec $R = \{(p1, q1)\}$ | pour $p1 \xrightarrow{c} p2, \exists x, q2 \overset{c}{\Rightarrow} x \wedge x \approx p2$ <br> et pour $q2 \xrightarrow{c} q3, \exists y, p1 \overset{c}{\Rightarrow} y \wedge y \approx q3$ <br> les unifications possible des variables sont : $x = q3 \wedge y = p2$ |
| $p2 \overset{?}{\approx} q3 \wedge p2 \overset{?}{\approx} q3 \wedge$ <br> $p2 \overset{?}{\approx} q3$ <br> avec $R = \{(p1, q1), (p1, q2)\}$ | Simplification |
| $p2 \overset{?}{\approx} q3$ <br> avec $R = \{(p1, q1), (p1, q2)\}$ | pour $p2 \xrightarrow{d} p3, \exists x, q3 \overset{d}{\Rightarrow} x \wedge x \approx p3$ <br> et pour $q3 \xrightarrow{d} q4, \exists y, p2 \overset{d}{\Rightarrow} y \wedge y \approx q4$ <br> unification possible : $x = q4 \wedge y = p3$ |
| $p3 \overset{?}{\approx} q4 \wedge p3 \overset{?}{\approx} q4$ <br> avec $R = \{(p1, q1), (p1, q2), (p2, q3)\}$ | Simplification |
| $p3 \overset{?}{\approx} q4$ <br> avec $R = \{(p1, q1), (p1, q2), (p2, q3)\}$ | les deux états sont des états sans transition donc on propage rien |
| $TRUE$ avec $R = \{(p1, q1), (p1, q2)$ <br> $, (p2, q3)\}$ | |
| | **=> les deux systèmes sont faiblement bisimilaires** |

**3-** Si on nomme le système composé par $1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$ par $S$ alors on a S1=+(S,P1) et S2=+(S,P2).
**4-** la figure 6 représente les deux système $S1$ et $S2$ ainsi que leurs observateurs. On notera par $pi$ les état de $S1$ et $qi$ les états de $S2$.

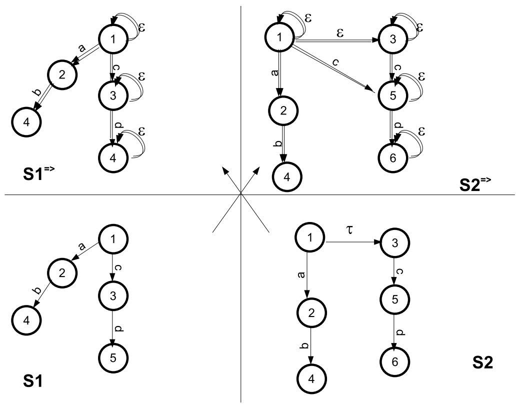


FIGURE 6 – S1 et S2 et leurs observateurs

| | |
|---|---|
| $p1 \overset{?}{\approx} q1$ et $R = \emptyset$ | pour $p1 \xrightarrow{c} p3, \exists x, q1 \overset{c}{\Rightarrow} x \wedge x \approx p3$<br>et pour $p1 \xrightarrow{a} p2, \exists y, q1 \overset{a}{\Rightarrow} y \wedge y \approx p2$<br>et pour $q1 \xrightarrow{\tau} q3, \exists z, p1 \overset{\epsilon}{\Rightarrow} z \wedge z \approx q3$<br>et pour $q1 \xrightarrow{a} q2, \exists t, p1 \overset{a}{\Rightarrow} t \wedge t \approx q2$<br>les unifications possible des variables sont : $x = q5 \wedge y = q2 \wedge z = p1 \wedge t = p2$ |
| $p3 \overset{?}{\approx} q5 \wedge p2 \overset{?}{\approx} q2 \wedge$<br>$p1 \overset{?}{\approx} q3 \wedge p2 \overset{?}{\approx} q2$<br>avec $R = \{(p1, q1)\}$ | simplification |
| $p3 \overset{?}{\approx} q5 \wedge p2 \overset{?}{\approx} q2 \wedge$<br>$\underline{p1 \overset{?}{\approx} q3}$<br>avec $R = \{(p1, q1)\}$ | pour $p1 \xrightarrow{c} p3, \exists x, q3 \overset{c}{\Rightarrow} x \wedge x \approx p3$<br>et pour $p1 \xrightarrow{a} p2, \exists y, q3 \overset{a}{\Rightarrow} y \wedge y \approx p2$<br>et pour $q3 \xrightarrow{c} q5, \exists z, p1 \overset{c}{\Rightarrow} z \wedge z \approx q5$<br>les unification possible : $x = q5 \wedge$ $y = \emptyset$ $\wedge z = p3$ |
| $FALSE$ | pas d'unifcation possible pour $y$ donc $p1 \not\approx q3$<br>**=>** $p1 \not\approx q1$ **(les deux système ne sont pas faiblement bisimilaire)** |

**5-** La bisimulation faible n'est pas une congruence par rapport à l'opérateur de composition alternative.

---

**Exercice - 7** *Bissimulation faible vs. bissimulation branchante*

---

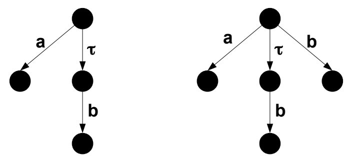


FIGURE 7 – Deux LTS

**1-** Soient les deux LTS suivants de la figure 7. Dites s'ils sont faiblement bissimilaires.
(s'ils le sont, donnez la relation de bissimulation faible, sinon expliquez pourquoi)

**2-** Même question avec la bissimulation branchante.
(s'ils le sont, donnez la relation de bissimulation branchante, sinon expliquez pourquoi)

**3-** Que pouvez-vous en déduire concernant la finesse des deux relations ?

**4-** (avancé) Prouvez que la bissimulation branchante est une congruence par rapport au choix.