M1 Informatique — 2015/2016
Systèmes à événements discrets — 14 janvier 2016

Partiel
Une feuille A4 de notes manuscrites autorisée

1. Réseau de Petri et automate fini. *7 points*

On considère un système constitué de deux processus séquentiels, l'un producteur, l'autre consommateur. Le producteur fournit de façon répétitive des blocs de données, deux blocs à la fois. Ces données sont traitées de façon répétitive, trois blocs à la fois, par le processus consommateur.

Les blocs produits sont déposés dans un tampon d'où ils sont extraits dans l'ordre d'arrivée par le processus consommateur. Les blocs sont tous de taille identique et l'on a réservé pour les échanges entre les deux processus un tampon de taille égale à cinq blocs.

La production de deux blocs n'est pas lancée tant qu'il n'y a pas d'emplacements disponibles dans le tampon où écrire ces blocs de données.

a. Représenter le système à l'aide d'un réseau de Petri. On notera

- I et A les places associées au producteur, avec I pour inactif et A pour actif,
- I' et A' les places associées au consommateur,
- V et O celles associées au tampon, comptabilisant les emplacements vides et occupés,
- d et f les transitions de début et de fin de tâche du producteur, et
- d' et f' les transitions de début et de fin de tâche du consommateur.

Porter une attention particulière au marquage initial.

b. Notant $\mathbf{u} = [u_d, u_f, u_{d'}, u_{f'}]$ le vecteur dont les composantes sont les nombres de franchissements des transitions d, f, d' et f' et $\mathbf{x} = [x_A, x_I, x_O, x_V, x_{A'}, x_{I'}]$ l'état (c.-à-d. le vecteur des marquages) qui en résulte en partant de l'état initial $\mathbf{x}_0$, déterminer la matrice B telle que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}B$.

c. On considère l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs $\mathbf{v}$ non nuls à composantes entières positives ou nulles tels que $B\mathbf{v} = 0$. Si $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}$ sont tels que chaque composante de $\mathbf{v}_1$ est inférieure ou égale à la composante correspondante de $\mathbf{v}_2$, alors $\mathbf{v}_1 \preceq \mathbf{v}_2$, et si, de plus $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$, alors $\mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_2$. Un vecteur $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ est minimal s'il n'y a pas de vecteur $\mathbf{v}' \in \mathcal{V}$ satisfaisant $\mathbf{v}' \prec \mathbf{v}$. Déterminer l'ensemble des éléments minimaux de $\mathcal{V}$. *(Indication : il y en a trois.)*

d. Les P-invariants sont les expressions obtenues en multipliant les deux membres de l'expression $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}B$ par $\mathbf{v}$ où $\mathbf{v}$ est un élément minimal de $\mathcal{V}$. Donner les P-invariants du réseau de Petri.

e. Donner le diagramme des transitions d'état de l'automate fini équivalent au réseau de Petri (ayant le même nombre d'états). *(Indication : le résultat du* **d.** *est utile pour vérifier que l'on ne fait pas d'erreur.)*

f. Calculer l'expression régulière associée au langage des séquences de (franchissements) de transitions ramenant le système dans son état initial. Détailler le cheminement (calculs, diagrammes) amenant à cette expression.

2. Automate temporisé. *3 points*

Un "social mixer" est organisé où les invités se rencontrent autour de tables pour deux. Lorsqu'un invité arrive à une table où il y a une ou deux places vides il s'y installe, sinon il passe à une autre table. Dès que deux invités sont réunis autour d'une table, ils discutent pendant quelques minutes avant de quitter la table.

On considère l'une des tables. Il y a deux types d'événements, arrivée a d'un invité et départ d de deux invités.
a. Donner le diagramme des transitions d'état de l'automate fini représentant le système.
b. On suppose que la séquence des durées de vie associées aux arrivées est périodique, $(1, 2, 1, 2, \ldots)$, et que la durée de vie associée aux départs est constante, égale à 3. Lorsqu'une arrivée et un départ se produisent au même instant, le départ est effectué avant la prise en compte de l'arrivée (les invités ayant terminé cèdent leurs places). Donner la trajectoire (ou chronogramme) du système entre $t = 0$ et $t = 15$ (bornes comprises) en utilisant les conventions graphiques du cours.

3. Réseau de Petri temporisé - Modélisation *4 points*

On considère un ordinateur de deuxième génération (exploité avec un moniteur d'enchainement séquentiel de travaux) utilisé avec un lecteur de cartes (1200 cartes/minute) et une imprimante (900 lignes/minute).

Un *travail moyen de type "calcul"* est défini par :
- lire 300 cartes,
- utiliser le processeur pendant une minute,
- imprimer 300 lignes.

Un *travail moyen de type "E/S"* est défini par :
- lire 1500 cartes,
- utiliser le processeur pendant une minute,
- imprimer 1500 lignes.

Les périphériques sont gérés par un ordinateur séparé (ordinateur secondaire), qui constitue une bande magnétique d'entrée à partir des cartes et liste sur imprimante le contenu d'une bande magnétique de sortie. L'ordinateur principal est alimenté par la bande d'entrée et produit la bande de sortie, au fur et à mesure des travaux. L'opérateur transfère la bande d'entrée d'une fournée – de l'enregistreur de bande connecté à l'ordinateur secondaire vers le lecteur de bande connecté à l'ordinateur principal – et aussi la bande de sortie – de l'enregistreur de bande connecté à l'ordinateur principal vers le lecteur de bande connecté à l'ordinateur secondaire. Il prépare aussi le train de cartes constituant une fournée et distribue les résultats de chaque fournée (découpage des listings et mise dans des casiers).

Le temps de transfert des bandes d'un ordinateur à l'autre est de 5 minutes dans chaque sens (les temps de rembobinage sont inclus dans les temps de transferts ; les transferts sont, plus précisément, des échanges de bandes d'entrée ou de bandes de sortie). On suppose qu'une bande regroupe une fournée de 50 travaux dont n sont de type calcul et les autres de type E/S. On néglige la durée de lecture et d'écriture des bandes.
On suppose que les travaux arrivent à un rythme régulier, que le temps de constitution d'une fournée (préparation du train de cartes) est de 10 minutes et que le temps de distribution des résultats d'une fournée (découpage et tri des listes) est aussi de 10 minutes.
On suppose que l'ordinateur principal, l'ordinateur secondaire et l'opérateur ne s'interrompent pas quand ils ont commencé une activité (calculs d'une fournée, lecture des cartes ou écriture des listings d'une fournée, constitution ou distribution d'une fournée ou transfert de bande).

a) Modéliser le système au moyen d'un réseau de Petri temporisé (qui pourrait être utilisé pour évaluer les performances du système). Ne pas oublier d'indiquer la valeur de la durée de vie associée à chaque transition temporisée.
b) Le modèle obtenu est-il un graphe d'événements ? Justifier la réponse.
c) Pour quelles valeurs de n aura-t-on un débit de 50 travaux par heure ?

4. Réseau de Petri temporisé à durées constantes. 4,5 *points*

On considère un système constitué de trois serveurs S_1, S_2 et S_3. Les clients sont servis successivement par les trois serveurs, dans l'ordre S_1, S_2, S_3. Il y a deux files d'attente, non-bornées, avant S_1 et entre S_1 et S_2. Lorsqu'un client a fini d'être servi par S_2 il ne peut partir que si S_3 est inactif ; sinon le client reste à S_2 jusqu'à ce que S_3 devienne inactif.

On suppose que les durées de service sont constantes, v_1, v_2 et v_3, et on note a_k l'instant d'arrivée du k-ième client et $d_{i,k}$ l'instant où le k-ième client quitte le serveur S_i, $i = 1, 2, 3$. Le système est initialement vide.

a) Construire un réseau de Petri temporisé pour ce système.

b) Établir les équations récurrentes satisfaites par les instants $d_{i,k}$, $i = 1, 2, 3$. Pour arriver à ces équations, les variables intermédiaires (autres que a_k et les $d_{i,k}$, $i = 1, 2, 3$) seront donc éliminées.

c) Supposant que les durées entre arrivées sont constantes, égales à v_0, déterminer le débit du système (le nombre moyen de clients sortant du système par unité de temps).

5. Processus de Poisson. 1,5 *points*

L'imprimante utilisée par la scolarité d'IBGBI reçoit en moyenne 9 travaux d'impression par heure ; les arrivées de ces travaux suivent une loi de Poisson.

a) L'imprimante doit être éteinte pour 10 minutes de maintenance. Quelle est la probabilité (en %) que personne ne voudra utiliser l'imprimante pendant cette durée ?

On pourra utiliser l'approximation $e^{-1/2} = 0{,}6$ pour ce calcul.

b) Pour effectuer cette maintenance, l'ingénieur système n'a pas éteint l'imprimante immédiatement après la fin d'un travail d'impression mais l'a simplement éteinte quand il est arrivé devant, voyant qu'elle n'était pas active. Faut-il le lui reprocher ou l'en féliciter ? Pourquoi ?

6. Automate stochastique (Bonus). 4 *points*

On reprend le système du problème **2.** mais on suppose maintenant que les durées de vie associées aux arrivées a sont des variables aléatoires, V_a, suivant la loi exponentielle de paramètre (ou taux) λ_a :

$$G_a(t) = P(V_a \leq t) = 1 - e^{-\lambda_a t},\ t \geq 0.$$

et que les durées de vie associées aux départs d sont des variables aléatoires, V_d, suivant la loi exponentielle de paramètre λ_d :

$$G_d(t) = P(V_d \leq t) = 1 - e^{-\lambda_d t},\ t \geq 0.$$

a) Montrer que la probabilité qu'un événement a ou d se produise dans un intervalle de temps infinitésimal dt est $\lambda_a \cdot dt$ ou $\lambda_d \cdot dt$, si l'événement est actif (elle est nulle sinon).

b) A un instant t, le système a la probabilité $p_i(t)$ d'être dans un état i, $i = 0, 1, 2$, où l'état initial est noté 0. Le vecteur $\mathbf{p}(t) = [p_0(t),\ p_1(t),\ p_2(t)]$, initialement égal à $\mathbf{p}(0) = [1,\ 0,\ 0]$, tend lorsque $t \to \infty$ vers un vecteur $\mathbf{p}^* = [p_0^*,\ p_1^*,\ p_2^*]$.

En exprimant que lorsque $t \to \infty$ la probabilité de sortir d'un état pendant un intervalle de temps dt est égale à la probabilité d'y rentrer pendant le même intervalle de temps, établir que le vecteur $\mathbf{p}^*$ satisfait $\mathbf{p}^* A = 0$ où A est une matrice 3×3 que l'on déterminera.

c) En déduire les expressions des composantes de $\mathbf{p}^*$ en fonction de λ_a et λ_d.