TD 7. Automates temporisés stochastiques

On considère le réseau de Petri marqué de la question **1** du TD6, représentant un modèle producteur-consommateur.
Le processus producteur attend avant de débuter une itération (place p_1 marquée) qu'un emplacement soit disponible dans le tampon. Quand un emplacement est disponible (place p_6 non vide) il débute la production d'un bloc (franchissement de la transition t_1). Le bloc ainsi produit est écrit dans le tampon pour être lu par le consommateur (franchissement de la transition t_2 et augmentation du marquage de la place p_5 d'un jeton).
Le processus consommateur attend avant de débuter une itération (place p_3 marquée) qu'un bloc ait été écrit dans le tampon (place p_5 non vide). Quand un bloc est écrit, il le lit (franchissement de la transition t_3) puis commence à le traiter (place p_4 marquée). Quand il a terminé (franchissement de la transition t_4), il libère l'emplacement utilisé par le bloc dans le tampon (place p_6 augmente d'un jeton) et attend le bloc produit suivant.
Le marquage initial est donné par $X_0 = (1, 0, 1, 0, 0, q)$; on s'intéresse au comportement en fonction de la taille q (nombre de blocs) du tampon.
1. On désire construire l'automate d'état fini équivalent au réseau de Petri marqué, pour $q \geq 2$. Pour $q = 2$ et $q = 3$, on donnera le diagramme de transitions d'états, en précisant le marquage correspondant à chaque état et en étiquettant les arcs par les transitions correspondantes. Pour q quelconque, il faut écrire un algorithme fournissant une description de l'automate associé pouvant être utilisée en entrée d'un simulateur.
Indication : déterminer les P-invariants du réseau de Petri et les utiliser pour montrer que les états peuvent être codés par le triplet $(x(p_1), x(p_3), x(p_6))$ et sont au nombre de $4q$.
2. Une temporisation est associée à chaque transition $t_i,\ i = 1 \ldots 4,$ dont le franchissement détermine la fin d'une opération. Les durées de vie $V_i,\ i = 1 \ldots 4,$ sont des variables aléatoires suivant des lois exponentielles de paramètres (ou taux) $\lambda_i,\ i = 1 \ldots 4$:

$$G_i(t) = P(V_i \leq t) = 1 - e^{-\lambda_i t},\ t \geq 0.$$

Quelle est la probabilité que la durée de vie V_i soit inférieure à dt, infinitésimal ?
Le fait que dt soit infinitésimal permet de trouver une expression très simple.
3. Pour $q = 2$, à un instant t, le système a la probabilité $p_j(t)$ d'être dans un état $j,\ j = 0 \ldots 7,$ où l'état initial est noté 0. Le vecteur $p(t) = (p_0(t), p_1(t), p_2(t), \ldots, p_6(t), p_7(t))$, initialement égal à $p(0) = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, tend vers un vecteur $p^* = (p_0^*, p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*, p_5^*, p_6^*, p_7^*)$ lorsque $t \to \infty$, le vecteur des probabilités en régime permanent.
Calculer en fonction des p_j^* le nombre moyen de jetons dans chacune des places en régime permanent.
Note : Le choix pour l'indice j de suivre le classement des codes $x(p_6)x(p_3)x(p_1)$ dans l'ordre lexicographique inverse est conseillé en vue de la généralisation à q quelconque.
4. Calculer la *fréquence* moyenne de franchissement de chacune des transitions en régime permanent en fonction des λ_i et des p_j^*.

On va maintenant calculer explicitement les probabilités p_j^* en fonction des λ_i.
5. Sachant que l'on est dans l'état j et que t_i est une transition franchissable à partir de cet état, déduire de la réponse à la question **2** la probabilité de franchir t_i pendant l'intervalle $[0,\ dt]$? Quelle est la probabilité de franchir la même transition à partir du même état j pendant l'intervalle $[0,\ dt]$ sachant juste que l'on est en régime permanent ?
6. Soit J_- l'ensemble des états tels qu'une transition permet de passer de chacun des états

$\in J_-$ à l'état j et soit J_+ l'ensemble des états tels qu'une transition permet de passer de l'état j à chacun des états $\in J_+$. En régime permanent, quelle relation relie les probabilités des états $\in J_-$ et les taux des transitions de ces états vers un état j à la probabilité de l'état j et aux taux des transitions de j vers les états $\in J_+$? Pourquoi ?

7. Montrer que le vecteur p^* satisfait $p^*\Lambda = 0$ où Λ est une matrice 8×8 dont les colonnes sont déterminées à partir du résultat de la question **6**. Déterminer Λ.

8. Déterminer les expressions des composantes du vecteur p^*. On pourra utiliser un logiciel de calcul symbolique tel que Maple ou Mathematica.

9. Substituer les expressions obtenues en **8** pour les p_j^* dans les formules obtenues en **4** pour les fréquences moyennes de franchissement des transitions en régime permanent. Commenter les résultats.

10. Etudier les valeurs des fréquences moyennes de franchissement des transitions en fonction des valeurs des taux λ_i. On construira des graphes pour faciliter cette étude.

11. Programmer dans un langage de calcul symbolique la généralisation de cette étude à une taille de tampon q quelconque. Commenter les résultats.