

Chapitre 4.

Automates temporisés stochastiques

4.1 Introduction

Dans la pratique, les systèmes opèrent toujours dans des environnements soumis à l'**incertitude**. C'est particulièrement vrai pour les SED, qui, par leur nature même, sont souvent sujets à des actions humaines imprédictibles et aux défaillances des machines.

Le processus de partage des ressources, qui fournit une motivation importante pour l'étude des SED, est caractérisé par l'**imprédictibilité** : changements des demandes des utilisateurs, pannes d'ordinateurs, incohérences dans les prises de décisions humaines, etc.

Quoique les **modèles non-temporisés** (ou logiques) considérés au chapitre 2 rendent compte de « **tous les comportements possibles** » du système, leur emploi est limité aux objectifs de **performance logique (ou qualitative)** : absence de blocage, garantie d'exclusion mutuelle, possibilité de comportement périodique, etc.

Les **modèles temporisés déterministes** du type considéré au **chapitre 3** contribuent sans aucun doute à la compréhension de base de quelques propriétés quantitatives du comportement dynamique d'un système (par exemple, le **comportement périodique** de systèmes qui peuvent être modélisés par des **graphes d'événements**). Cependant leur utilisation est limitée puisque les modèles avec des structures d'horloges déterministes capturent une seule séquence temporisée d'événements (ou d'états), ou, en d'autres termes, **une seule trajectoire** (chronogramme) du système.

Afin de développer des techniques descriptives ou prescriptives pour évaluer la performance des SED temporisés ou pour les contrôler « de manière optimale » eu égard à des mesures de performance quantitatives et en présence d'incertitudes, des modèles plus raffinés incorporant des éléments de nature stochastique sont nécessaires. Dans ce chapitre nous introduisons des modèles stochastiques qui vont nous permettre d'étendre la méthodologie développée jusqu'à présent, et d'obtenir ainsi des moyens quantitatifs d'analyse.

Nous nous concentrons en particulier sur les modèles d'automates temporisés. Nous avons vu que l'entrée pour ces modèles est une structure d'horloges, qui détermine la séquence d'événements actionnant l'automate sous-jacent. Notre effort principal va être de développer des modèles stochastiques pour la structure d'horloges, et d'étudier les propriétés du SED résultant.

4.2 Structures d'horloges stochastiques

On a vu au chapitre 3 que les modèles temporisés des SED nécessitent la spécification d'une structure d'horloges $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_i : i \in \mathbf{E}\}$, où $\mathbf{v}_i = (v_{i,1}, v_{i,2}, \dots)$ est une séquence d'horloges pour l'événement $i \in \mathbf{E}$.

Le mécanisme de temporisation d'événements résumé dans la figure 3.4 (ou équivalentement le schéma d'ordonnancement d'événements de la figure 3.10) est alors utilisé pour générer les chronogrammes du système sous-jacent. Notre objectif est ici d'étoffer ces modèles en incorporant des composantes stochastiques souvent rencontrées dans les SED.

Jusqu'à présent, la structure d'horloges \mathbf{V} était supposée être complètement spécifiée dans un sens déterministe. Supposons maintenant que les séquences d'horloges \mathbf{v}_i , $i \in \mathbf{E}$, sont spécifiées seulement comme des séquences stochastiques. Cela veut dire que nous ne disposons plus de nombres réels $(v_{i,1}, v_{i,2}, \dots)$ pour chaque événement i mais, à la place, d'une **fonction de répartition**, notée G_i , qui décrit la séquence d'**horloges aléatoires** $\mathbf{V}_i = (V_{i,1}, V_{i,2}, \dots)$.

On verra qu'en se concentrant sur des séquences d'horloges avec des propriétés particulières, on pourra analyser certaines classes, intéressantes et utiles, de modèles temporisés de SED.

Définition : La *structure d'horloges stochastiques* (ou *structure de durées de vies aléatoires*) associée à un ensemble d'événements E est un ensemble de fonctions de répartition

$$\mathbf{G} = \{G_i: i \in E\} \quad (4.1)$$

Caractérisant les séquences d'horloges stochastiques

$$\mathbf{V}_i = (V_{i,1}, V_{i,2}, \dots), \quad i \in E, \quad V_{i,k} \in \mathbb{R}^+, \quad k = 1, 2, \dots$$

On se limitera à des séquences d'horloges qui sont indépendamment identiquement distribuées (i.i.d.) et indépendantes l'une de l'autre. Ainsi chaque séquence \mathbf{V}_i est complètement caractérisée par une fonction de répartition $G_i(t) = P[V_i \leq t]$.

Cette hypothèse est faite afin de ne pas surcharger la notation et d'éviter des complications qui pourraient obscurcir les aspects essentiels des modèles que nous voulons discuter.

Cependant, il y a plusieurs façons d'étendre une structure d'horloges pour inclure des situations où les éléments d'une séquence \mathbf{V}_i sont corrélés ou bien deux séquences d'horloges dépendent l'une de l'autre.

Nous pouvons maintenant revisiter les automates temporisés et les réseaux de Petri temporisés sachant que les séquences d'horloges, qui sont les entrées de ces modèles, sont des processus stochastiques au lieu d'être juste des séquences de nombres réels.

Nous nous concentrerons sur les automates parce qu'ils fournissent le cadre le plus simple et le plus pratique pour introduire les blocs stochastiques de base que nous utiliserons. La discussion sur les automates temporisés stochastiques pourra ensuite être facilement appliquée aux réseaux de Petri temporisés stochastiques.

Les **variables aléatoires** sont notées avec des **capitales italiques**, telles que E ou X , alors que les ensembles sont notés avec des capitales italiques grasses, ainsi \mathbf{E} pour l'ensemble des événements et \mathbf{X} pour l'espace des états de l'automate sous-jacent.

4.3 Automates temporisés stochastiques

On reprend la notation utilisée pour les automates temporisés, simplement transformée en adoptant la notation « variable aléatoire » :

X est l'état courant

E est l'événement le plus récent (causant la transition dans l'état X)

T est la date de l'événement le plus récent (correspondant à l'événement E)

N_i est la valeur courante du compte de l'événement i

Y_i est la valeur courante de l'horloge de l'événement i

Comme dans le cas déterministe, le prime ($'$) représente l'état suivant X' , l'événement déclencheur suivant E' , la date de l'événement suivant T' , le compte suivant N_i' , et la valeur suivante de l'horloge de i , Y_i' .

En plus de la spécification de la structure d'horloges stochastiques, deux autres caractéristiques probabilistes peuvent être incluses dans le cadre de modélisation :

1. L'état initial de l'automate x_0 peut ne pas être connu de façon déterministe. En général on suppose que l'état initial est une variable aléatoire X_0 . Cela nécessite de spécifier la *fonction masses de probabilité (fmp)* de l'état initial
$$p_0(x) = P[X_0 = x], \quad x \in \mathbf{X} \quad (4.2)$$
2. La fonction de transition d'état f peut ne pas être déterministe. En général, on suppose que si l'état courant est x et l'événement déclencheur est e' , l'état suivant x' est spécifié en termes probabilistes au moyen d'une *probabilité de transition*

$$p(x'; x, e') = P[X' = x' | X = x, E' = e'], \quad x, x' \in \mathbf{X}, \quad e' \in \mathbf{E} \quad (4.3)$$

Bien entendu, si $e' \notin \Gamma(x)$, alors $p(x'; x, e') = 0$ pour tout $x' \in \mathbf{X}$.

Un automate temporisé équipé avec une structure d'horloges stochastiques, une *fonction masses de probabilité* pour l'état initial $p_0(x) = P[X_0 = x]$, et des probabilités de transition d'état définissent un *automate temporisé stochastique*.

Les entrées de ce système sont les séquences d'horloges aléatoires, \mathbf{V}_i , générées selon les fonctions de répartition pour les durées de vie, G_i .

Définition : Un *automate temporisé stochastique* est un sextuplet $(\mathbf{E}, \mathbf{X}, \Gamma, p, p_0, \mathbf{G})$ où

\mathbf{E} est un *ensemble d'événements* dénombrable,

\mathbf{X} est un *ensemble d'états* dénombrable,

$\Gamma(x)$ est un *ensemble d'événements possibles* ou *actifs*, défini pour tout $x \in \mathbf{X}$ avec $\Gamma(x) \subseteq \mathbf{E}$,

$p(x'; x, e')$ est une *probabilité de transition d'état*, définie pour tout $x, x' \in \mathbf{X}$, $e' \in \mathbf{E}$, et telle que $p(x'; x, e') = 0$ pour tout $e' \notin \Gamma(x)$,

$p_0(x)$ est la fmp $P[X_0 = x]$, $x \in \mathbf{X}$, de l'état initial X_0 , et

$\mathbf{G} = \{G_i: i \in \mathbf{E}\}$ est une structure d'horloges stochastiques.

L'automate génère une séquence d'états stochastique (X_0, X_1, \dots) à travers un mécanisme de transition (basé sur les observations $X = x$, $E' = e'$):

$$X' = x' \text{ avec la probabilité } p(x'; x, e') \quad (4.4)$$

et il est actionné par la séquence d'événements stochastique (E_1, E_2, \dots) générée selon

$$E' = \arg \min_{i \in \Gamma(X)} \{Y_i\} \quad (4.5)$$

avec les *valeurs d'horloges* stochastiques Y_i , $i \in \mathbf{E}$, définies par

$$Y'_i = \begin{cases} Y_i - Y^* & \text{si } i \neq E' \text{ et } i \in \Gamma(X) \\ V_{i, N_{i+1}} & \text{si } i = E' \text{ ou } i \notin \Gamma(X) \end{cases} \quad i \in \Gamma(X') \quad (4.6)$$

où la *durée entre événements* Y^* est définie selon

$$Y^* = \min_{i \in \Gamma(x)} \{Y_i\} \quad (4.7)$$

et les *comptes d'événements* N_i , $i \in E$, sont définis par

$$N'_i = \begin{cases} N_i + 1 & \text{si } i = E' \text{ ou } i \notin \Gamma(x) \\ N_i & \text{sinon} \end{cases} \quad i \in \Gamma(x') \quad (4.8)$$

et

$$\{V_{i,k}\} \sim G_i \quad (4.9)$$

où la notation tilde (\sim) signifie « distribué selon la loi ». De plus, les conditions initiales sont : $X_0 \sim p_0(x)$, et $Y_i = V_{i,1}$ et $N_i = 1$ si $i \in \Gamma(x_0)$.

Si $i \notin \Gamma(x_0)$, alors Y_i n'est pas défini et $N_i = 0$.

Enfin, les dates des événements sont mises à jour selon

$$T' = T + Y^* \quad (4.10)$$

La complexité de cette définition tient surtout à la notation car l'idée de base est la même que dans le cas déterministe (voir chapitre 3) :

- comparer les valeurs d'horloges pour les événements possibles i ,
- déterminer l'événement déclencheur,
- mettre à jour l'état du processus (état de l'automate),
- mettre à jour les valeurs d'horloges et les comptes.

L'interprétation détaillée des équations (4.5) – (4.8) est la même que dans le cas des automates temporisés avec des structures d'horloges déterministes. L'événement suivant E' est celui qui a la plus petite valeur d'horloge parmi tous les événements actifs $i \in \Gamma(X)$.

La valeur d'horloge correspondante, Y^* , est la durée entre les occurrences des événements E et E' ; elle fournit la quantité dont progresse le temps dans (4.10). Les valeurs d'horloges pour tous les événements qui demeurent actifs dans l'état X sont décrémentées de Y^* , excepté pour l'événement déclencheur E' et tous les événements nouvellement activés, auxquels sont affectés de nouvelles durées de vie V_{i,N_i+1} . Les événements ont leur compte incrémenté chaque fois qu'une nouvelle durée de vie leur est affectée.

Remarque : On peut concevoir que deux événements se produisent au même moment. Cependant, normalement, on supposera que chaque fonction de répartition G_i de la structure d'horloges est absolument continue sur $[0, +\infty)$ (de sorte que sa fonction densité existe) et a une moyenne finie. En conséquence, deux événements pourront se produire au même instant seulement avec la probabilité 0.

4.4 Le processus semi-markovien généralisé

Un automate temporisé stochastique est utilisé pour générer le processus stochastique $\{X(t)\}$. Ce processus stochastique est appelé un **processus semi-markovien généralisé (PSMG)**.

Définition : Un **processus semi-markovien généralisé** est un processus stochastique $\{X(t)\}$ avec espace d'état X , généré par un automate temporisé stochastique $(E, X, \Gamma, p, p_0, G)$.

L'aspect markovien du PSMG provient du fait que l'état du processus se comporte comme une **chaîne de Markov aux points de transition d'état**, comme l'indique (4.4) : la valeur que peut prendre l'état suivant X' dépend uniquement de l'état courant et pas de l'histoire passée, ainsi toute information sur les états passés est sans utilité (pas besoin de mémoire d'état).

Si l'intervalle de temps pendant lequel le processus a été dans l'état courant n'avait pas d'importance (pas besoin de mémoire de l'âge de l'état), on aurait un **processus de Markov** (pour lequel la fonction de répartition des durées entre événements est la fonction de répartition exponentielle).

Cependant, les durées entre événements, spécifiées à l'aide de (4.7), ont, en général, des répartition arbitraires.

Ce sont les caractéristiques définissant un **processus semi-markovien**. *J.-M. Delosme - ICD*

Dans un processus semi-markovien, la répartition des durées entre événements est spécifiée par elle-même, en plus, afin de compléter le modèle. Autrement dit, aucune information telle que \mathbf{E} , $\mathbf{\Gamma}$, ou \mathbf{G} est requise; une répartition pour Y^* est fournie à la place de (4.7).

Dans un **processus semi-markovien généralisé**, par contre, la répartition de Y^* n'est pas donnée; elle dépend des fonctions de répartition G_i , $i \in \mathbf{E}$, et des mécanismes de mise à jour des horloges et des comptes définis par (4.6) à (4.8).

En fait, si l'on considère un autre processus stochastique dont l'« état » est constitué à la fois par $X(t)$ et par toutes les valeurs d'horloges Y_i pour $i \in \mathbf{\Gamma}(X)$, c'est un processus semi-markovien. Ce processus est en temps continu, puisqu'une partie de son état est décrite par les horloges à valeurs réelles.

Le PSMG est un modèle pour le comportement de l'état d'une large classe de SED. Les fonctions de répartition G_i sont tout à fait générales (mis à part les contraintes techniques imposées pour éviter les problèmes pathologiques tels que deux événements se produisant exactement au même instant). Une question qui se pose pour ce modèle est si une durée de vie $V_{i,k}$ peut dépendre de l'état courant x . Comme ce serait source de complications, on supposera ici que ce n'est pas le cas.

Une trajectoire d'un PSMG est générée essentiellement comme une trajectoire de l'état d'un automate temporisé, à partir du moment où la structure d'horloges stochastique et les probabilités de transition d'état sont spécifiées.

On procède alors en appliquant le mécanisme (4.4)-(4.10) et en échantillonnant à partir des fonctions de répartition appropriées quand nécessaire. Par « échantillonner » on entend attendre que la nature détermine une valeur pour la variable aléatoire mise en jeu, ou bien on suppose l'existence d'un processus générant des « nombres aléatoires », comme dans une simulation numérique.

Le schéma d'ordonnancement d'événements esquissé dans la figure 3.10 demeure applicable. La seule différence fondamentale est que le composant **structure d'horloges** est remplacé par « nature », qui génère les durées de vie d'événements requises (basées sur \mathbf{G}) quand un événement est activé; de manière alternative, il est remplacé par un **générateur de nombres aléatoires**, utilisé pour les simulations sur ordinateur.

La génération d'une durée de vie $v_{i,k}$ selon la fonction de répartition G_i est effectuée en générant un premier nombre, $v_{i,k}$, à l'aide d'un générateur de nombres aléatoires répartis uniformément entre 0 et 1 puis en calculant $v_{i,k} = G_i^{-1}(v_{i,k})$, où G_i^{-1} est la fonction réciproque de G_i .

Exemple 4.1

On répète l'exemple 3.1 pour mettre l'accent sur les aspects distinctifs, déterministes et stochastiques, du même automate sous-jacent, dont le diagramme de transition d'état est reproduit dans la figure 4.1.

Un PSMG est généré par le modèle d'automate temporisé stochastique suivant :

$$E = \{a, b\}, X = \{0, 1, 2\}$$

$$\Gamma(0) = \Gamma(2) = \{a, b\}, \Gamma(1) = \{a\}.$$

$$p(1; 0, a) = 1, p(2; 0, b) = 1,$$

$$p(2; 1, a) = 1,$$

$$p(0; 2, b) = 1, p(1; 2, a) = 1$$

avec toutes les autres probabilités de transition égales à 0.

C'est une formulation probabiliste de la structure de transition d'état déterministe montrée dans la figure 4.1.

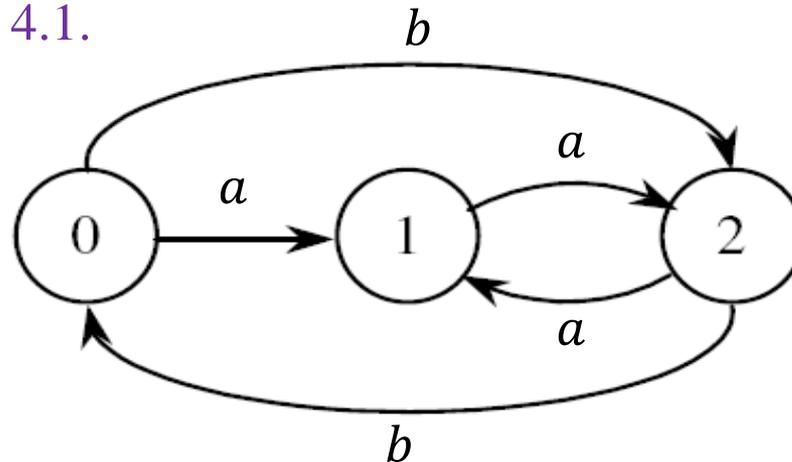


Figure 4.1. Diagramme de transition d'état pour l'exemple 4.1

La structure d'horloges stochastique est complètement spécifiée au moyen de deux fonctions de répartition, G_a et G_b . En outre, une fonction de masses de probabilité de l'état initial p_0 est aussi donnée.

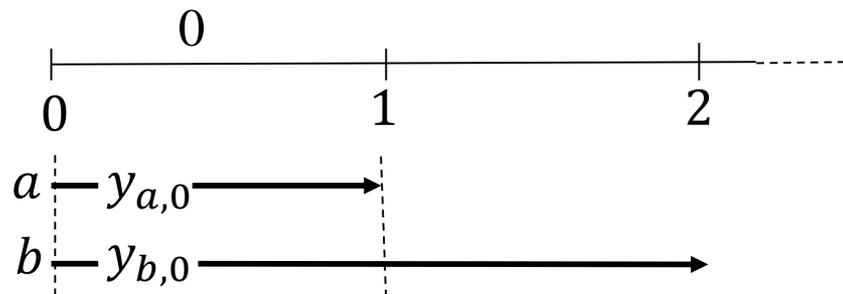
La première étape de la construction d'une trajectoire est l'échantillonnage selon p_0 . Autrement dit, on effectue un simple tirage aléatoire dont le résultat est caractérisé par $p_0 = P[X_0 = x]$, $x = 0, 1, 2$.

Supposons que le résultat est $x_0 = 0$. Ceci commence à définir une trajectoire pour l'état du processus à la date $t = 0$, comme montré dans la figure 4.2.

Puisque $\Gamma(0) = \{a, b\}$, les deux événements sont actifs et les valeurs de leurs comptes sont initialement fixées à 1. De sorte à déterminer leurs valeurs d'horloges, on doit échantillonner selon les deux fonctions de répartition G_a et G_b . Supposons que ce soit fait et que l'on ait obtenu $v_{a,1} = 1$ et $v_{b,1} = 2$. On fixe donc

$$y_{a,0} = 1, \quad y_{b,0} = 2,$$

comme montré dans la figure 4.2.



On dispose maintenant des nombres réels $y_{a,0}$ et $y_{b,0}$ pour travailler, exactement comme dans l'exemple 3.1.

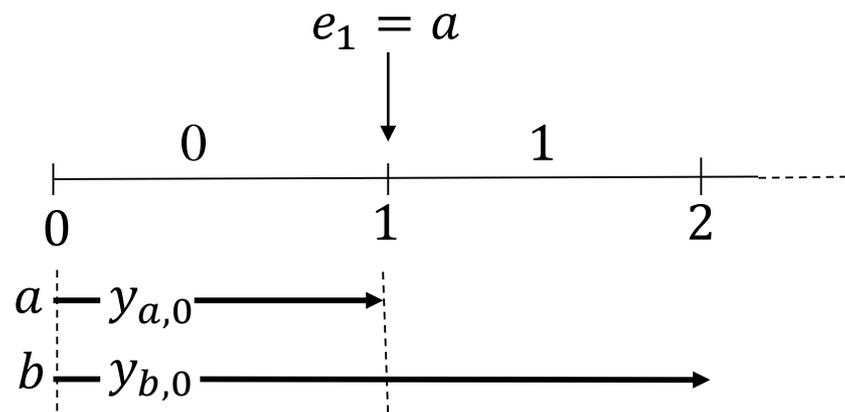
Utilisant (4.5) et (4.6) on voit aisément que

$$y_0^* = \min \{y_{a,0}, y_{b,0}\} = y_{a,0} \Rightarrow e_1 = a$$

et, donc, l'état suivant est déterminé à partir du fait que

$$p(1; 0, a) = 1 \Rightarrow x_1 = 1$$

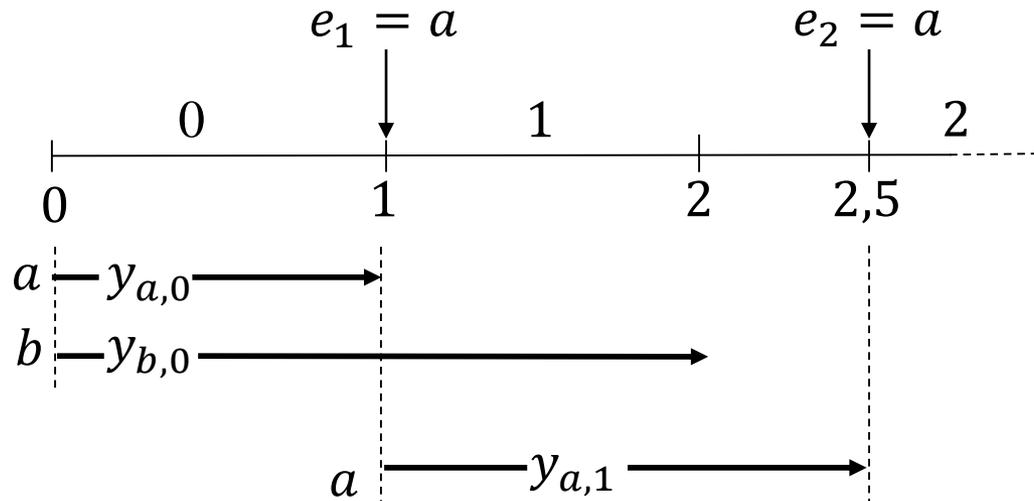
Aussi, la date de l'événement est simplement donnée par $t_1 = y_0^* = 1$.



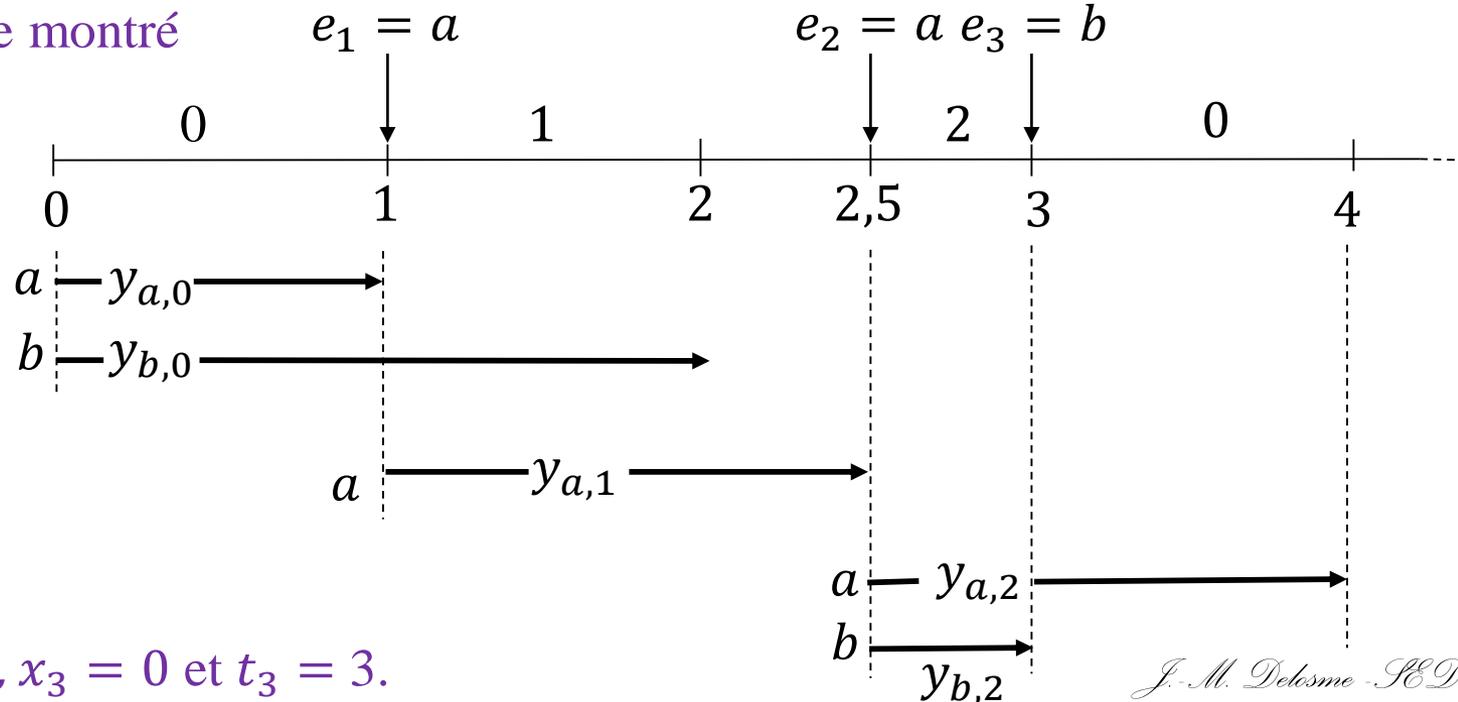
On répète le processus avec $\Gamma(1) = \{a\}$. L'événement b est désactivé dans cet état. Puisque a était l'événement déclencheur, il est à nouveau activé avec un compte incrémenté de 1.

Pour déterminer une nouvelle durée de vie, on tire à nouveau un échantillon selon G_a afin d'affecter à la variable aléatoire $V_{a,2}$ dans (4.6) une valeur $v_{a,2}$. Supposant que l'on obtienne $v_{a,2} = 1,5$, alors on fixe $y_{a,1} = 1,5$.

Évidemment, l'événement déclencheur suivant est $e_2 = a$. Puisque $p(2; 1, a) = 1$, l'état suivant est $x_2 = 2$, et le temps avance jusqu'à $t_2 = t_1 + y_1^* = 2,5$.



Ce processus continue avec $\Gamma(2) = \{a, b\}$, et deux autres échantillons $v_{a,3} = 1,5$, $v_{b,2} = 0,5$, comme montré dans la figure 4.2.



On obtient $e_3 = b$, $x_3 = 0$ et $t_3 = 3$.

Finalement, on tire un échantillon selon G_b pour obtenir la valeur d'horloge suivante $v_{b,3} = 1,5$. La dernière transition montrée dans la figure 4.2 se produit avec $e_4 = a$ et $t_4 = 4$.

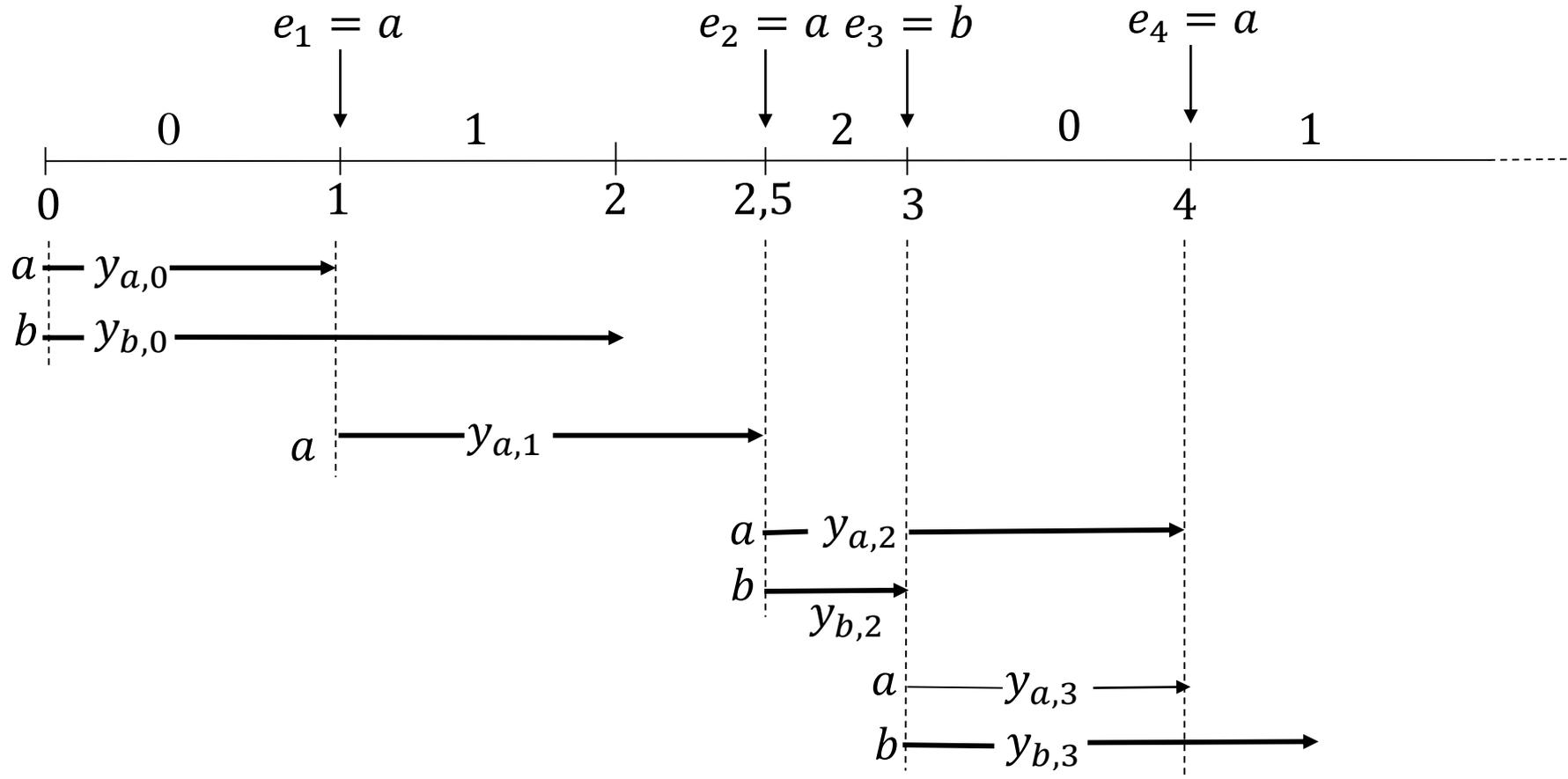


Figure 4.2. Chronogramme pour l'exemple 4.1

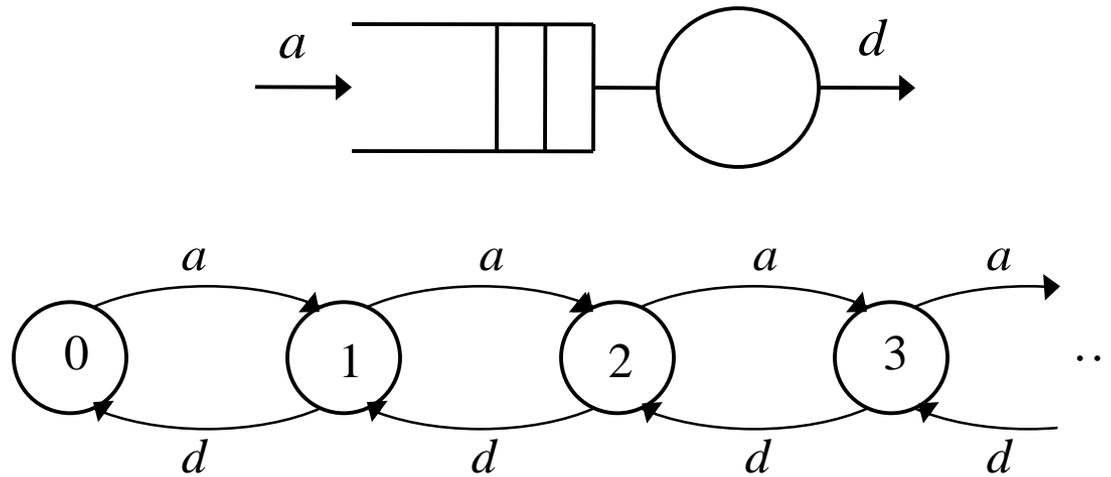
Remarque : Plus souvent que non, on aura affaire à des structures de transition d'état qui seront déterministes. Autrement dit, étant donné un événement x et un événement déclencheur e' , les probabilités de transition d'état sont de la forme $p(x'; x, e') = 1$ pour un x' . Dans de tels cas, on évitera la notation probabiliste, un peu lourde, en spécifiant le modèle à l'aide de la fonction de transition déterministe $x' = f(x, e)$, et en écrivant $(\mathbf{E}, \mathbf{X}, \mathbf{\Gamma}, f, p_0, \mathbf{G})$ au lieu de $(\mathbf{E}, \mathbf{X}, \mathbf{\Gamma}, p, p_0, \mathbf{G})$.

Comme dans le cas des modèles d'automates temporisés déterministes, la structure d'automate et la structure d'horloges stochastique sont tout à fait séparées. Cela apparaît clairement dans l'exemple 4.1 ci-dessus : mis à part le processus d'échantillonnage (pour spécifier les durées de vie des événements pour les valeurs d'horloges ainsi que l'état initial), toutes les étapes pour construire la trajectoire sont identiques au cas déterministe.

4.4.1 Systèmes de files d'attente comme automates temporisés stochastiques

On examine à nouveau la station de service de base, déjà rencontrée plusieurs fois. Le système est montré dans la figure 4.3, accompagné de son diagramme de transition d'état et d'un modèle d'automate temporisé avec une structure d'horloges définie au moyen des fonctions de répartition G_a et G_d .

Cet automate engendre un PSMG $\{X(t)\}$, où $X(t)$ représente la longueur de la file d'attente, c'est-à-dire l'état de la station de service de base.



$$\mathbf{E} = \{a, d\}, \quad \mathbf{X} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\Gamma(x) = \{a, d\} \text{ pour tout } x > 0, \quad \Gamma(0) = \{a\}$$

$$f(x, e') = \begin{cases} x + 1 & \text{si } e' = a \\ x - 1 & \text{si } e' = d \text{ et } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Donnés : } p_0(x), \quad x \in \mathbf{X}, \quad G_a(\cdot), G_b(\cdot)$$

Figure 4.3. Modèle PSMG pour la station de service de base

Exemple 4.2

On construit une trajectoire temporelle du système de file d'attente de la figure 4.3, où sont donnés la condition initiale déterministe, $x_0 = 0$, et la structure d'horloges suivante :

$$\begin{aligned} V_{a,k} &= 1 && \text{pour } k = 1, 2, \dots \\ V_{d,k} &\sim G_d && \text{pour } k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

où G_d est une fonction de répartition donnée.

Ainsi, les arrivées se produisent de manière déterministe toutes les unités de temps, alors que les temps de service sont des variables aléatoires indépendantes tirées à partir d'une même loi G_d .

Supposons que l'on échantillonne selon cette loi et que la séquence de temps de service (s_1, s_2, \dots) soit obtenue. La trajectoire résultante (pour les cinq premiers départs) est montrée dans la figure 4.4.

On observe que le premier événement d est activé à la date $t = 1$ à la suite de la première arrivée. Similairement, le quatrième événement d est activé à l'instant $t = 4$, quand la longueur de la file d'attente devient à nouveau positive après le troisième départ.

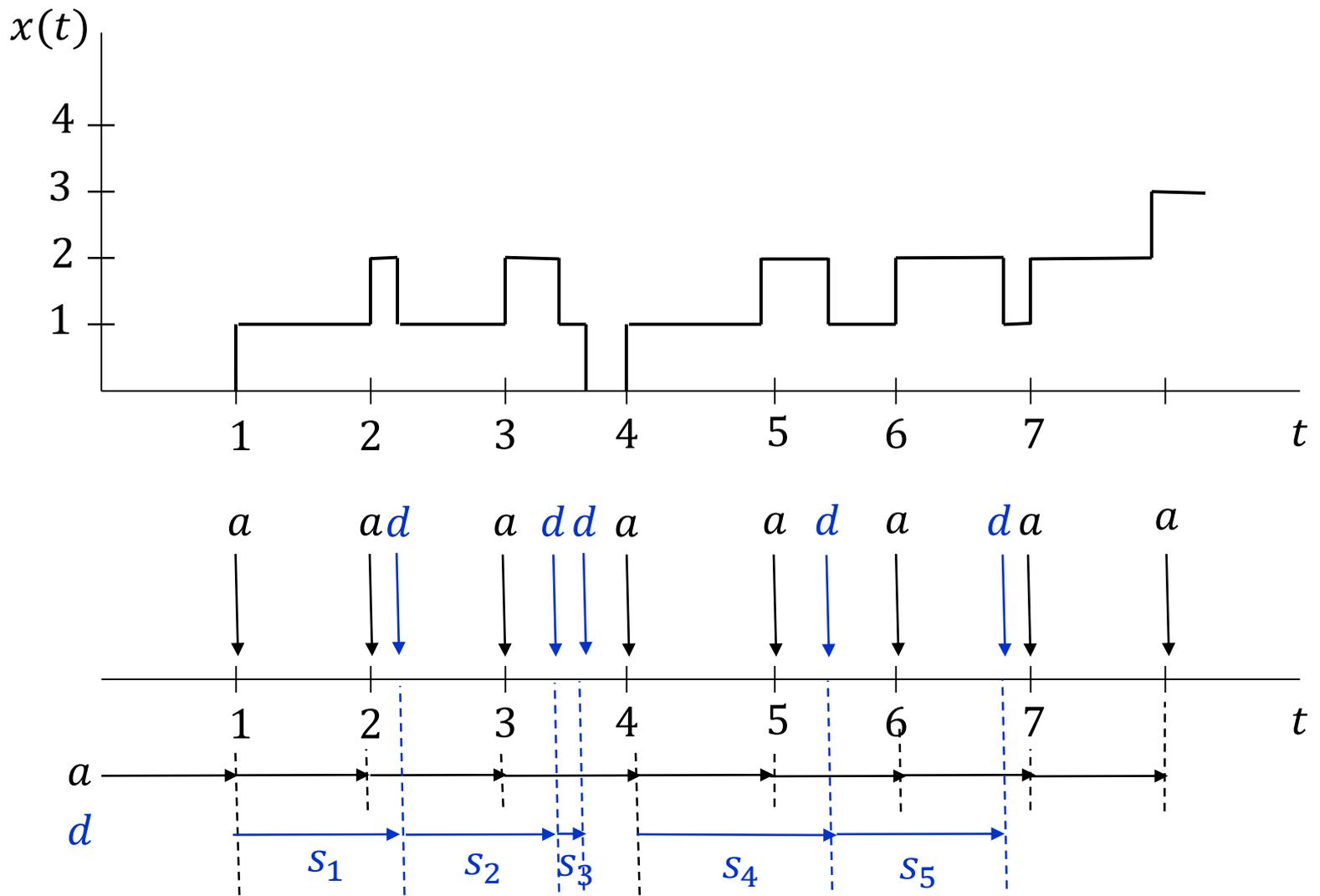


Figure 4.4. Chronogram pour le système de file d'attente de l'exemple 4.2

4.4.2 Analyse de PSMG

Étant donné une structure d'horloges stochastique particulière G , on a vu comment un automate temporisé génère un PSMG $\{X(t)\}$ pour modéliser l'état d'un SED stochastique. Notre objectif est alors de déduire les caractéristiques de ce processus. La tâche probablement la plus fondamentale est de calculer la probabilité de trouver le SED dans l'état x à la date t , c.-à-d., $P[X(t) = x]$. On peut de cette façon évaluer de manière probabiliste quels états sont plus probables que d'autres.

Le PSMG $\{X(t)\}$ contient la séquence d'états $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots)$, où $k = 1, 2, \dots$ compte les occurrences d'événements. Il ne faut pas oublier, cependant, d'autres processus intéressants relatifs à $\{X(t)\}$.

Les principaux de ces processus sont :

- La séquence de durées entre événements $\mathbf{Y}^* = (Y_0^*, Y_1^*, \dots)$, à partir de laquelle on peut caractériser le temps écoulé entre occurrences d'événements successives. Puisque les occurrences d'événements correspondent à des transitions d'état (incluant le cas $x' = x$ où une occurrence d'événement laisse l'état inchangé), cette séquence fournit aussi de l'information sur les durées de maintien dans chaque état. Cette information est particulièrement importante, car elle permet d'évaluer des mesures de performance utiles pour beaucoup de SED pratiques. *J.-M. Delosme - SED*

- La séquence des événements $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots)$, à partir de laquelle on peut évaluer de manière probabiliste quels événements sont plus probables que d'autres, et ainsi calculer des probabilités de la forme $P[E_k = i], i \in \mathbf{E}$, ou $P[E_k = i \mid X_k = x]$.
- Le processus de comptage $N_i(t)$ pour chaque événement $i \in \mathbf{E}$, qui fournit le compte des occurrences de l'événement i dans l'intervalle $(0, t]$.

Notre point de départ est le développement de modèles simples et utiles pour les séquences d'horloges d'événements. Ce développement sera basé sur un processus fondamental de comptage d'événements, le processus de Poisson.

4.5 Le processus de comptage de Poisson

Considérons un SED avec un seul type d'événement. Soit $\{N(t)\}$ le processus qui compte le nombre d'occurrences des événements sur $(0, t]$. Ainsi, l'espace d'état du processus est l'ensemble des entiers non-négatifs $\{0, 1, 2, \dots\}$. Du fait de la nature de comptage du processus, on a

$$N(0) \leq N(t_1) \leq \dots \leq N(t_k)$$

pour tout $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$.

Une trajectoire typique $n(t)$ d'un processus de comptage $\{N(t)\}$ est montrée dans la figure 4.5.

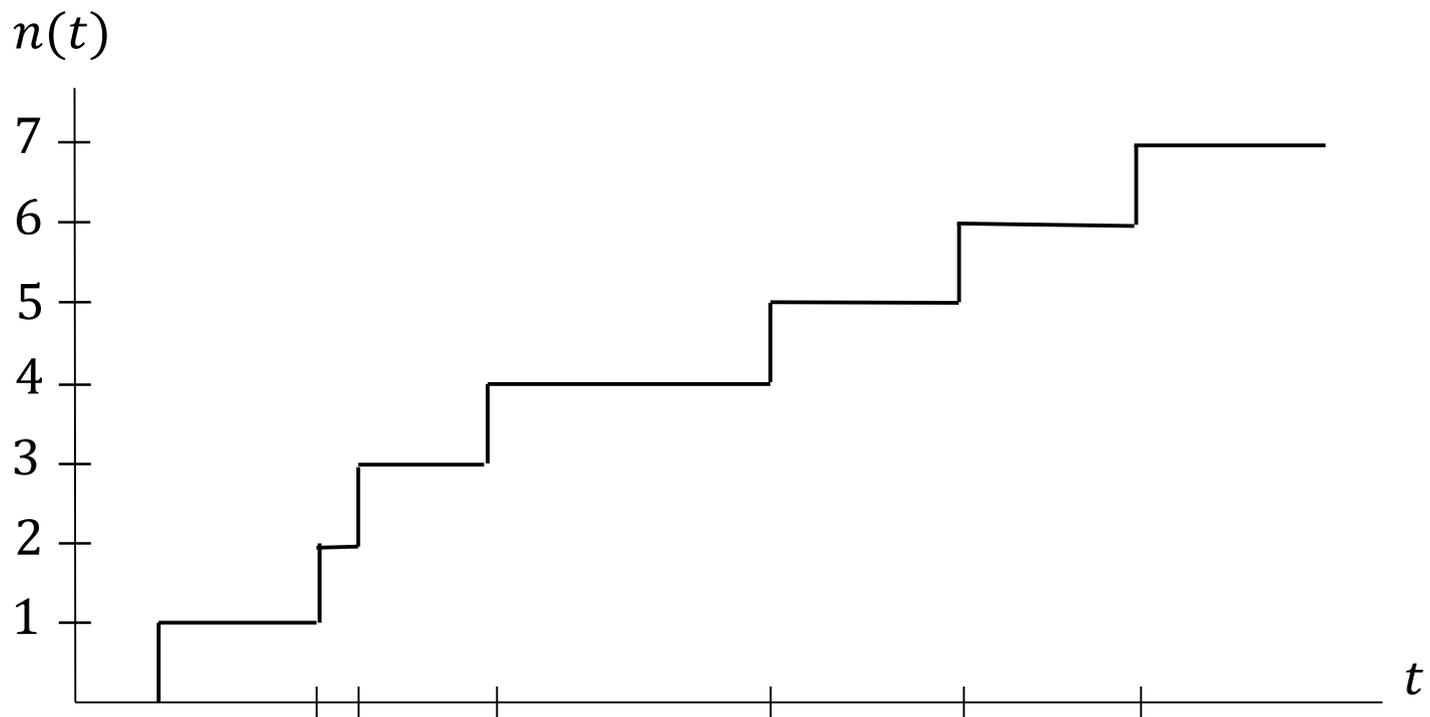


Figure 4.5. Chronogramme typique d'un processus de comptage $\{N(t)\}$

Partitionnons la ligne du temps en un nombre arbitraire d'intervalles $(t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \dots$, chacun de longueur arbitraire, comme illustré dans la figure 4.6.

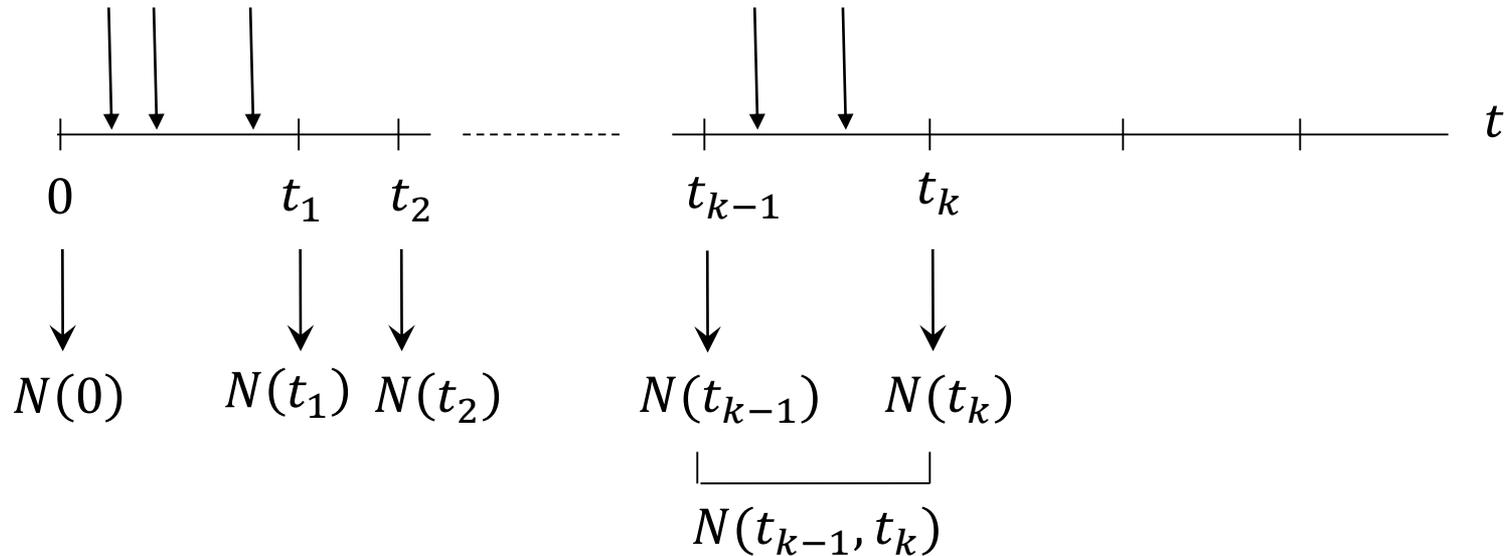


Figure 4.6. Partitionnement de la ligne du temps pour un processus de comptage d'événements, $N(t_{k-1}, t_k) = N(t_k) - N(t_{k-1})$.

Posons aussi $t_0 = 0$, et supposons un compte initial d'événements de 0, c.-à-d. $N(0) = 0$. Finalement, définissons

$$N(t_{k-1}, t_k) = N(t_k) - N(t_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

afin de compter le nombre d'événements se produisant juste dans l'intervalle $(t_{k-1}, t_k]$ (qui inclut le point t_k).

Nous allons maintenant faire trois hypothèses qui vont permettre de réduire le processus de comptage général à un processus simple, qu'il est possible de caractériser complètement au moyen d'une seule loi. En particulier, sous ces hypothèses, on obtiendra une expression explicite pour la probabilité que n événements se produisent dans l'intervalle $(0, t]$:

$$P_n(t) = P[N(t) = n], \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.12)$$

(H1) Au plus un événement peut se produire à n'importe quel instant; il n'est donc pas possible que deux événements ou plus se produisent simultanément.

(H2) Les variables aléatoires $N(t)$, $N(t, t_1)$, $N(t_1, t_2)$, ..., $N(t_{k-1}, t_k)$, ... sont mutuellement indépendantes pour tout $0 \leq t \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ et tout $k = 1, 2, \dots$. Cette hypothèse spécifie que le compte d'événements dans un intervalle quelconque $(t_{k-1}, t_k]$ ne doit pas être affecté par ce qui s'est produit dans le passé, c.-à-d., dans les intervalles de temps avant l'instant t_{k-1} .

(H3) $P[N(t_{k-1}, t_k) = n]$, $n = 0, 1, \dots$ peut dépendre de la longueur de l'intervalle $(t_k - t_{k-1})$, mais est par contre indépendante des dates t_{k-1}, t_k pour tout intervalle $(t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \dots$.

Il est naturel de s'attendre à ce que $N(t_{k-1}, t_k)$ dépende de $(t_k - t_{k-1})$; intuitivement, plus l'intervalle est long plus il contiendra d'événements.

D'autre part, l'indépendance de t_{k-1}, t_k est une forme de stationnarité; le comportement stochastique du processus de comptage est le même quel que soit l'endroit sur la ligne du temps où se place l'intervalle de longueur $(t_k - t_{k-1})$. Ainsi, commencer un compte à l'instant $t_{k-1} = t$ ou à l'instant $t_{k-1} = t' \neq t$ devrait donner le même comportement stochastique sur un intervalle $(t_{k-1}, t_k]$ de longueur fixée.

Définition : Un processus $\{N(t)\}$ satisfaisant **(H2)** est appelé un processus avec *incrémentés indépendants*. Si, de plus, **(H3)** est satisfaite, $\{N(t)\}$ est un processus avec des *incrémentés indépendants stationnaires*.

Une implication directe de **(H3)** est que, puisque la loi régissant $N(t_{k-1}, t_k)$ ne dépend pas de t_{k-1}, t_k , mais seulement de $s = t_k - t_{k-1}$, on peut repositionner l'intervalle $(t_{k-1}, t_k]$ sur $(0, s]$. Alors, du fait de **(H3)** :

$$P[N(t_{k-1}, t_k) = n] = P[N(s) = n], \quad s = t_k - t_{k-1}$$

pour tout $n = 0, 1, \dots$. Posant $t_{k-1} = t$ et $t_k = t + s$, $s > 0$, on peut réécrire cette relation selon

$$P[N(t, t + s) = n] = P[N(s) = n] \tag{4.13}$$

A partir des hypothèses **(H1)**-**(H3)** on peut déduire la solution générale

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.14)$$

L'expression dans l'équation (4.14) est connue sous le nom de *loi de Poisson*. Elle caractérise complètement le processus stochastique $\{N(t)\}$, qui compte les occurrences d'événements dans l'intervalle $(0, t]$ sous les hypothèses **(H1)** à **(H3)**.

Il y a plusieurs raisons expliquant pourquoi le processus de comptage de Poisson est un composant essentiel dans la modélisation stochastique et l'analyse des SED. Il possède plusieurs propriétés qui permettent de simplifier les modèles PSMG de SED et de faciliter leur analyse.

Cependant le processus de Poisson n'est pas uniquement une abstraction commode; il existe de nombreuses preuves expérimentales que ce processus modélise précisément beaucoup de processus d'intérêt pratique, comme le trafic téléphonique. Grosso modo, le processus de Poisson compte des événements qui arrivent de manière tout à fait aléatoire quoiqu'invariante dans le temps, de sorte que les hypothèses **(H1)** à **(H3)** sont effectivement satisfaites.

Finalement, (4.14) sert souvent en tant qu'approximation (comme la loi normale) pour la superposition d'une multiplicité de processus d'occurrence d'événements de nature assez générale; l'approximation est exacte pour la limite lorsque le nombre de processus ainsi combinés tend vers l'infini.

Moyenne et variance d'un processus de Poisson

Une façon directe d'évaluer l'espérance $E[N(t)]$ est de partir de la définition même de l'espérance ;

$$\begin{aligned} E[N(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t) \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} (\lambda t) \end{aligned}$$

Le changement d'indice de sommation $n - 1 \rightarrow m$ donne

$$E[N(t)] = (\lambda t) e^{-\lambda t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!}$$

Reconnaissant que cette somme est la définition de la fonction exponentielle $e^{\lambda t} = 1 + (\lambda t) + (\lambda t)^2/2! + \dots$, on obtient

$$E[N(t)] = \lambda t \tag{4.15}$$

Cette relation fournit une interprétation simple du paramètre $\lambda = E[N(t)]/t$: c'est le taux moyen auquel les événements se produisent par unité de temps.

On appelle parfois λ l'**intensité** ou le **taux** du processus de comptage de Poisson.

Un calcul similaire fournit la variance de $N(t)$:

$$\text{Var}[N(t)] = E[N^2(t)] - (E[N(t)])^2 = \lambda t \tag{4.16}$$

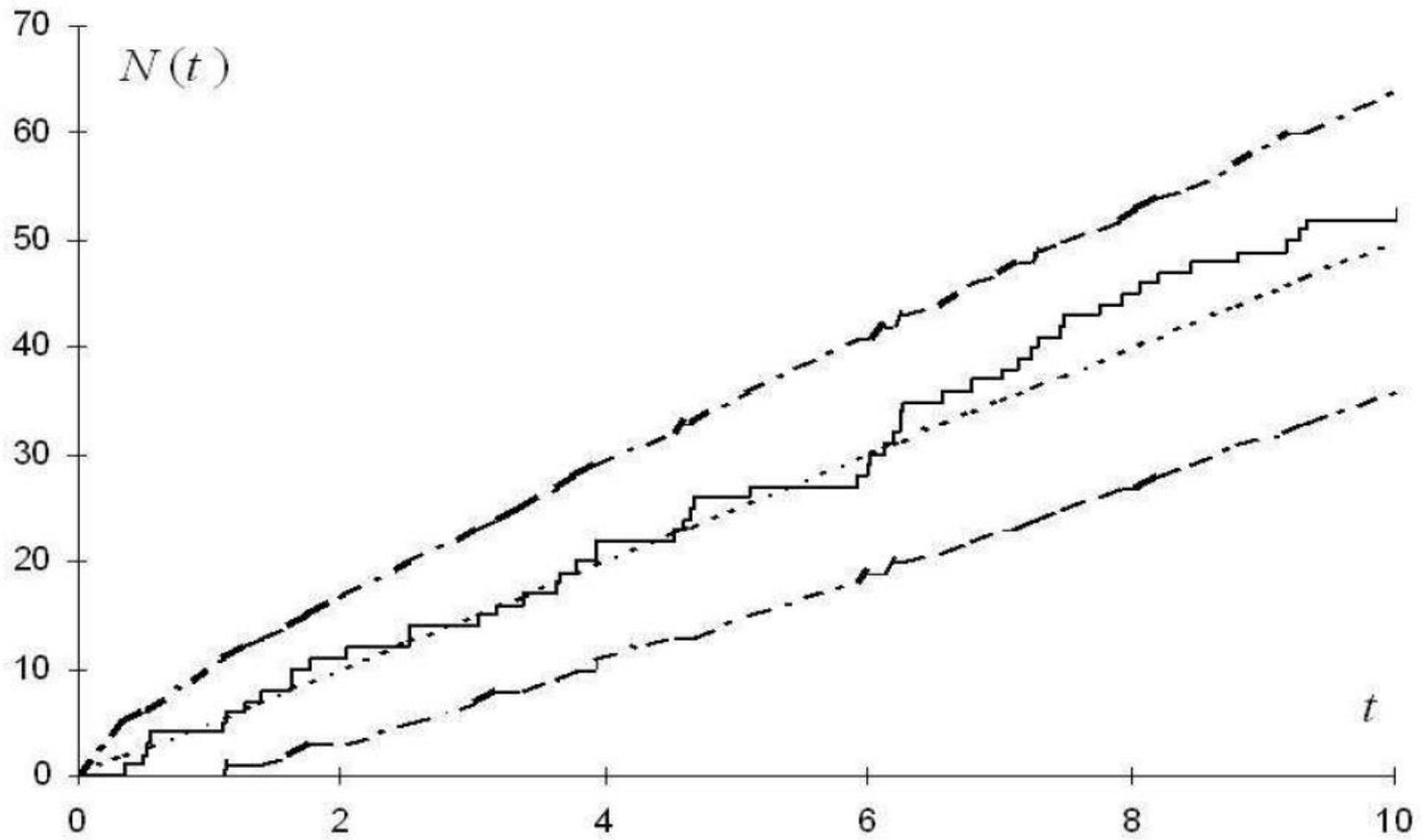


Figure 4.7. Trajectoire d'un processus de Poisson ($\lambda = 5$), avec l'espérance et l'intervalle de confiance à 95%.

A t fixé un intervalle de prédiction pour $N(t)$ est $\lambda t \pm 1.96\sqrt{\lambda t}$.

4.6 Propriétés du processus de Poisson

Le processus de Poisson a plusieurs propriétés remarquables. Quelques-unes des plus utiles sont présentées ci-dessous.

4.6.1 Durées entre événements distribuées exponentiellement

La première question que l'on se pose est : Comment **les durées entre événements consécutifs** sont-elles distribuées dans un processus de Poisson ?

(P1) Le processus formé par les durées entre événements $\{V_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, d'un processus de Poisson est une séquence stochastique i.i.d. caractérisée par la fonction de répartition :

$$G(t) = P[V_k \leq t] = 1 - P[V_k > t] = 1 - P[N(t) = 0] = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \quad (4.17)$$

C'est la **loi de probabilité exponentielle**.

La fonction de répartition dépend d'un seul paramètre, $\lambda > 0$. La densité de probabilité est obtenue en prenant la dérivée de $G(t)$ dans (4.17), ce qui donne

$$g(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \quad (4.18)$$

La moyenne et la variance de cette loi sont $1/\lambda$ et $1/\lambda^2$, respectivement.

On notera par la suite V , sans indice k , une durée entre événements « typique », représentative de toutes les durées entre événements du processus. *J.-M. Delosme - ICD*

4.6.2 La propriété d'être sans mémoire

Une autre question naturelle à se poser sur le processus de Poisson est : Comment les durées de vie résiduelles entre événements sont-elles distribuées ? La réponse à cette question révèle un fait tout à fait remarquable au sujet de la loi exponentielle, la propriété de ne pas avoir de mémoire.

(P2) Chaque durée de vie (ou horloge) résiduelle dans un processus de Poisson est caractérisée par exactement la même fonction de répartition exponentielle que pour la durée de vie originelle :

$$H(t, z) = P[Y \leq t \mid V > z] = G(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

indépendamment de l'âge de l'événement z .

Peu importe depuis combien de temps s'est produit le dernier événement d'un processus de Poisson, la loi régissant la durée jusqu'à l'événement suivant demeure fixée et est donnée par $G(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Le qualificatif « sans mémoire » est justifié par le fait qu'aucune mémoire de l'âge de l'événement n'est requise.

Le processus de Poisson est caractérisé par des durées entre événements distribuées exponentiellement et possède la propriété d'être sans mémoire. Réciproquement, la propriété d'être sans mémoire implique des durées entre événements distribuées exponentiellement, ce qui implique un processus de Poisson.

4.6.3 Superposition des processus de Poisson

On s'est limité jusqu'à présent à des SED avec un seul événement, que l'on a modélisé par un processus de Poisson. Considérons maintenant un SED avec m événements, $m > 1$.

On suppose que chaque séquence d'événements est modélisée par un processus de Poisson de paramètre λ_i , $i = 1, \dots, m$. On suppose aussi que ces m processus de Poisson sont **mutuellement indépendants**.

Le processus stochastique résultant est une superposition de m processus de Poisson, **chacun satisfaisant les propriétés (P1) et (P2)** mises en évidence dans les sections précédentes.

La question que l'on se pose est : les propriétés **(P1)** et **(P2)** sont-elles préservées dans le processus stochastique résultant ? et, si oui, sous quelle forme ?

Supposons qu'un événement j dans le processus composé se produit à l'instant T . Soit Y_i la durée de vie (ou horloge) résiduelle du i ème événement à cet instant. Pour l'événement j , l'horloge Y_j est simplement une durée de vie du processus de Poisson correspondant. Clairement, la nouvelle durée entre événements est la plus petite durée de vie résiduelle :

$$Y^* = \min_{i=1..m} \{Y_i\}$$

Pour déterminer la loi régissant chaque Y_i , il est nécessaire en général de connaître l'âge de l'événement correspondant. Cependant, la propriété **(P2)** d'être sans mémoire pour chacun des processus de Poisson implique que

$$Y_i \sim 1 - e^{-\lambda_i t} \quad (4.19)$$

On peut ainsi obtenir la fonction de répartition pour les durées entre événements Y^* selon :

$$P[Y^* \leq t] = 1 - P[Y^* > t] = 1 - P[\min_{i=1..m} \{Y_i\} > t]$$

On observe que l'événement aléatoire $[\min_{i=1..m} \{Y_i\} > t]$ est identique à l'événement aléatoire $[Y_1 > t \text{ et } Y_2 > t \dots \text{ et } Y_m > t]$. En outre, les m processus de Poisson étant indépendants, les variables aléatoires Y_1, Y_2, \dots, Y_m sont indépendantes.

Il s'ensuit que

$$P[Y^* \leq t] = 1 - \prod_{i=1}^m P[Y_i > t]$$

et, exploitant l'expression (4.19) pour la fonction de répartition de $Y_i, i = 1, \dots, m$,

$$P[Y^* \leq t] = 1 - \prod_{i=1}^m e^{-\lambda_i t} \quad (4.20)$$

Notant Λ la somme de tous les paramètres de Poisson :

$$\Lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i \quad (4.21)$$

(4.20) devient alors

$$P[Y^* \leq t] = 1 - e^{-\Lambda t} \quad (4.22)$$

On obtient ainsi la conclusion intéressante que

(P3) La superposition de m processus de Poisson de paramètres λ_i , $i = 1, \dots, m$, est aussi un processus de Poisson, de paramètre $\Lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i$.

4.7 Automates avec structure d'horloges de Poisson

Maintenant que les propriétés de base d'un processus de Poisson ont été établies, le processus de Poisson va être utilisé comme bloc de base pour un SED plus complexe. Déjà, dans la section 4.6.3 on a considéré un SED avec m événements actifs en permanence, chacun avec une séquence d'horloges de Poisson. Cette analyse va être étendue aux cas où des événements peuvent devenir impossibles dans certains états, et les propriétés des modèles résultants vont être établies.

Comme point de départ, il est utile d'adopter un point de vue de PSMG pour examiner un simple processus de Poisson de paramètre λ . Ainsi, un processus de Poisson peut être vu comme un PSMG généré par un automate temporisé stochastique $(\mathbf{E}, \mathbf{X}, \mathbf{\Gamma}, f, p_0, \mathbf{G})$, où $\mathbf{E} = \{e\}$ consiste en un seul événement, $\mathbf{X} = \{0, 1, \dots\}$, $\mathbf{\Gamma}(x) = \mathbf{E}$ pour tout x , $p_0(0) = 1$, et $f(x, e) = x + 1$ pour tout x , puisque le compte d'événements est simplement incrémenté avec chaque occurrence de e . Enfin, la structure d'horloges \mathbf{G} est spécifiée par $G(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, une seule fonction de répartition caractérisant toutes les durées de vie pour ce modèle.

Considérons maintenant un ensemble d'événements E comprenant m événements. Aucune contrainte n'est imposée sur $\Gamma(x)$, la fonction p (qui peut être une fonction de transition déterministe f), ou $p_0(x)$. Ainsi, on génère un PSMG général, sauf pour la structure d'horloges qui est contrainte à être :

$$\mathbf{G} = \{G_i, i = 1, \dots, m\}, \quad \text{avec } G_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$$

En d'autres termes, on considère que chaque séquence d'horloges est un processus de Poisson de paramètre $\lambda_i > 0$. La seule autre hypothèse qui est faite est que les m processus de Poisson sont indépendants.

4.7.1 Distribution des durées entre événements

La distribution de l'intervalle de temps entre deux événements consécutifs de ce PSMG peut être obtenue comme dans la section 4.6.3 où m processus de Poisson étaient combinés sans jamais désactiver un événement.

Supposons qu'un événement se produit, faisant entrer dans l'état x . En référant à l'équation (4.7) de la définition d'un automate temporisé stochastique, la durée suivante entre événements est donnée par

$$Y^* = \min_{i \in \Gamma(x)} \{Y_i\}$$

De la même manière que dans la section 4.6.3, on peut écrire

$$P[Y^* \leq t] = 1 - P[Y^* > t] = 1 - P\left[\min_{i \in \Gamma(x)} \{Y_i\} > t\right]$$

où le dernier événement aléatoire est identique à l'événement aléatoire $[Y_i > t$ pour tout $i \in \Gamma(x)]$.

Exploitant l'indépendance des Y_i , $i \in \Gamma(x)$, et le fait que, par la propriété **(P2)** d'être sans mémoire de chaque processus de Poisson, $Y_i \sim 1 - e^{-\lambda_i t}$, on obtient l'analogie de (4.22) :

$$P[Y^* \leq t] = 1 - \prod_{i \in \Gamma(x)} e^{-\lambda_i t} \quad (4.23)$$

Définissant la somme des paramètres de Poisson dans un état donné x selon

$$\Lambda(x) = \sum_{i \in \Gamma(x)} \lambda_i \quad (4.24)$$

et la répartition des durées entre événements dans l'état x selon

$$G(t, x) = P\left[\min_{i \in \Gamma(x)} \{Y_i\} \leq t\right] \quad (4.25)$$

on obtient alors, à partir de (4.23), la fonction de répartition des durées entre événements dans l'état x :

$$G(t, x) = P[Y^*(x) \leq t] = 1 - e^{-\Lambda(x)t} \quad (4.26)$$

qui est encore une loi exponentielle, quoiqu'elle dépende en général de l'état du processus x , à travers l'ensemble des événements possibles $\Gamma(x)$.

On observe que (4.26) est une généralisation de la propriété **(P3)**, obtenue sous l'hypothèse $\Gamma(x) = \mathbf{E}$ pour tous les états x .

Intuitivement, si un événement i est occasionnellement désactivé, à l'instant où i est réactivé sa nouvelle durée de vie est simplement une durée de vie résiduelle de la séquence d'horloges de Poisson originelle; par la propriété **(P2)**, cette durée de vie résiduelle suit exactement la même loi qu'une durée de vie.

Le seul effet des activations et désactivations est de changer le paramètre de Poisson $\Lambda(x)$ pour les durées entre événements du PSMG. En conséquence, les durées entre événements ne sont plus identiquement distribuées.

4.7.2 *Loi régissant les événements*

La loi de probabilité pour l'événement déclencheur dans un état donné x est définie par

$$p(i, x) = P[E' = i \mid X = x], \quad i = 1, \dots, m \quad (4.27)$$

où E' est le nouvel événement à se produire dans l'état x .

Clairement, $p(i, x) = 0$ pour tout $i \notin \Gamma(x)$. Pour tous les autres événements $i \in \Gamma(x)$, on obtient après environ deux pages de calculs l'expression suivante pour $p(i, x)$:

$$p(i, x) = \frac{\lambda_i}{\Lambda(x)} \quad (4.28)$$

où l'on voit que $p(i, x)$ dépend de l'état courant x seulement à travers l'ensemble d'événements possibles $\Gamma(x)$ utilisé pour définir $\Lambda(x)$ dans (4.24).

Exemple 4.3

On considère un système de file d'attente avec serveur unique, mais maintenant on autorise deux « classes » différentes de clients à servir (cf. figure 4.8). Les arrivées des clients de la classe 1 forment un processus que l'on suppose de Poisson avec le taux λ_1 . Similairement, les arrivées des clients de la classe 2 forment un processus de Poisson avec un taux λ_2 , et l'on suppose que les deux processus d'arrivée sont indépendants.

On suppose en outre que, quand un client est servi, le temps de service suit une loi exponentielle de paramètre μ_1 pour les clients de classe 1 et μ_2 pour les clients de classe 2. On suppose enfin que tous les temps de service sont mutuellement indépendants et indépendants des processus d'arrivée.

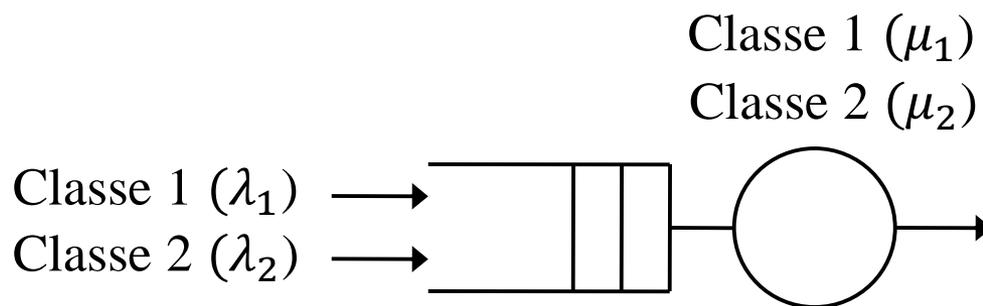


Figure 4.8. Système de file d'attente pour l'exemple 4.3

Les arrivées des clients de chaque classe forment un processus de Poisson et les temps pour les servir suivent une loi exponentielle.

On a affaire à un SED avec, pour ensemble d'événements, $E = \{a_1, a_2, d_1, d_2\}$, où a_i et d_i sont, respectivement, les événements d'arrivée et de départ pour les clients de la classe i , $i = 1, 2$. La séquence d'horloges pour chaque événement dans ce modèle suit une loi de Poisson (les temps de service distribués exponentiellement impliquent un processus de service de Poisson).

Pour décrire l'état de ce système, on doit spécifier non seulement la longueur de la file d'attente, mais aussi la classe du client servi actuellement (s'il y en a un), qui détermine si d_1 ou d_2 est un événement actif dans cet état. En fait l'état est un vecteur de la forme $[c_1, c_2, \dots, c_x]$, où c_k est la classe du client actuellement dans la k ème position dans la file (c_1 est la classe du client en train d'être servi), et x est la longueur de la file; si $x = 0$, alors on utilise 0 pour noter l'état de « système vide ».

Cette discussion montre qu'on a besoin d'un modèle de PSMG relativement élaboré pour ce système. Cependant, observant que la structure d'horloges est de Poisson, on peut exploiter des propriétés mises en évidence dans les sections précédentes afin d'obtenir des réponses rapides à des questions intéressantes.

On peut par exemple, sachant qu'à un certain moment le système est vide, se poser la question : Combien de temps faut-il en moyenne pour que le système soit à nouveau occupé ?

Dans l'état vide, les seuls événements possibles sont a_1, a_2 . Ainsi, par (4.26), la durée entre événements suit la loi exponentielle de paramètre $(\lambda_1 + \lambda_2)$. La propriété d'être sans mémoire implique que la quantité de temps passée dans cet état n'importe pas, et donc l'intervalle de temps jusqu'à l'occurrence du prochain événement suit aussi cette loi. La moyenne de cette distribution est $1/(\lambda_1 + \lambda_2)$, répondant ainsi à la question posée.

Si le système est dans un état où un client de la classe 1 est servi, on peut se poser la question : Quelle est la probabilité que l'événement suivant soit un départ ?

La réponse est facilement obtenue en utilisant (4.28). Dans cet état le taux total de Poisson est $(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)$, puisque les événements possibles sont a_1, a_2 et d_1 . Ainsi la probabilité que l'événement suivant soit d_1 est donnée par $\mu_1/(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)$.