

N° d'ordre: 494

N° attribué par la bibliothèque : 07ENSL0 494

THÈSE

en vue d'obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Lyon - École Normale Supérieure de Lyon

spécialité: Informatique

Laboratoire de LIP

École doctorale de Mathématiques et Informatique Fondamentale

présentée et soutenue publiquement le 24/11/08

par Monsieur Damien REGNAULT

Sur les automates cellulaires probabilistes: comportements asynchrones

Directeur de thèse : Monsieur Nicolas SCHABANEL

Co-directeur de thèse : Monsieur Éric THIERRY

Après avis de : Monsieur Cristopher MOORE, Rapporteur

Monsieur Alexander SHEN, Membre/Rapporteur

Monsieur Bernard YCART, Membre/Rapporteur

Devant la Commission d'examen formée de :

Monsieur Jean MAIRESSE, Membre

Monsieur Pascal KOIRAN, Membre

Monsieur Nicolas SCHABANEL, Membre

Monsieur Alexander SHEN, Membre/Rapporteur

Monsieur Éric THIERRY, Membre

Monsieur Bernard YCART, Membre/Rapporteur

Table des matières

Introduction	11
1 Définitions et rappels de probabilités	25
1.1 Probabilités	25
1.1.1 Chaînes de Markov	27
1.1.2 Marches aléatoires	28
1.1.3 Collectionneur de coupons	28
1.1.4 Moyenne du maximum de n variables aléatoires i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre p .	28
1.2 Automates cellulaires asynchrones	29
1.2.1 Définition	29
1.2.2 Les automates cellulaires considérés dans cette thèse	30
1.3 Les automates cellulaires sont des chaînes de Markov	32
1.4 Fonctions potentielles	32
1.5 Couplage	33
I Étude des dynamiques asynchrones en dimension 1	35
2 Présentation de la problématique	37
2.1 Les automates cellulaires élémentaires doublement quiescents	38
2.2 Présentation du comportement des ACEDQ sous une dynamique asynchrone	39
2.3 Analyse de la dynamique totalement asynchrone : résultats antérieurs	41
3 Analyse de la dynamique α-asynchrone	43
3.1 Observations clés et résultats sur la dynamique α -asynchrone	43
3.2 Fonctions potentielles basées sur des voisinages locaux	45
3.3 Note sur l'analyse des temps de relaxation	47
3.4 Analyse des temps de relaxation	49
3.4.1 Automate cellulaire E (200)	49
3.4.2 Automate cellulaire DE (232)	49
3.4.3 Automates cellulaires EF (192) et EFG (128)	50
3.4.4 Automates cellulaires B (206) et BC (222)	51
3.4.5 Automates cellulaires BDE (234) et BCDE (250)	52
3.4.6 Automates cellulaires BE (202) et BCE (218)	54
3.4.7 Automate cellulaire BEFG (130)	55
3.4.8 Automate cellulaire BCDEF (242)	58
3.4.9 Automate cellulaire BEF (194)	59
3.4.10 Automate cellulaire BG (142)	62
3.4.11 Automate cellulaire BF (198)	62

3.4.12	Automates cellulaires BEG (138), BDEF (226) et BDEG (170)	64
3.5	Des automates cellulaires au comportement surprenant	65
4	Un comportement original : l'automate cellulaire BCF(214)	69
4.1	Description informelle du comportement de l'automate BCF (214)	69
4.2	Preuve	72
4.3	Conclusion	79
5	Le cas d'une transition de phase : l'automate cellulaire BCDEFG(178)	81
5.1	Définitions	81
5.2	Discussion	82
5.3	Le modèle de percolation dirigée	83
5.4	Couplage avec la percolation dirigée	84
5.5	Conclusion	89
II	Automates cellulaires asynchrones en dimension 2	91
6	Introduction	93
6.1	La dimension 2	93
6.2	Des motifs liés à l'asynchronisme	93
6.3	Résultats expérimentaux sur Minorité 2D	95
6.4	Résultats précédents sur Minorité 2D	96
6.5	Nos résultats sur Minorité 2D	97
7	Minorité en dynamique totalement asynchrone avec le voisinage de von Neumann	99
7.1	Présentation de Minorité	99
7.2	Énergie d'une configuration	99
7.3	Configuration stable	104
7.4	Couplage avec l'automate cellulaire totalisant externe 976	104
7.5	Convergence à partir d'une configuration initiale arbitraire	106
7.6	Convergence à partir d'une configuration semi-bornée	107
7.7	Convergence à partir d'une configuration bornée	109
7.8	Conclusion	114
7.9	Perspectives sur l'étude de la dynamique α -asynchrone	114
8	Étude de la baisse initiale d'énergie	117
8.1	Un théorème sur les séquences décroissantes	118
8.2	Un algorithme pour énumérer les coloriage décroissants	120
8.3	Une nouvelle borne sur la baisse initiale d'énergie	124
8.4	Conclusion	124
III	Minorité sur d'autres topologies	127
9	Minorité sur les cycles, les cliques et les arbres	129
9.1	Le modèle	130
9.2	Potentiel, énergie et frontière	130
9.3	Graphe régulier	132
9.3.1	Cycle	132

9.3.2	Clique	133
9.4	Graphe biparti	134
9.5	Arbre	135
9.5.1	Ensemble limite	136
9.5.2	Temps de relaxation sur les arbres	139
9.6	Conclusion	144
Conclusion		145
10.1	La dimension 1	145
10.2	La dimension 2	146
10.2.1	Étude expérimentale	146
10.2.2	Minorité 2D	147
10.2.3	Travaux en cours sur Minorité $2D$ avec le voisinage de Moore.	147
10.3	Minorité sur des topologies différentes	148
A	La classe des automates cellulaires totalisant externes et ses sous-classes	151

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mes deux directeurs de thèse, Nicolas Schabanel et Éric Thierry. Scientifiquement, ils m'ont fourni ce sujet de thèse qui a su me motiver et ils m'ont laissé une grande autonomie tout en étant là pour discuter, m'indiquer de nouvelles directions et me faire avancer quand j'avais besoin de leurs conseils. J'ai particulièrement apprécié de travailler avec eux et je les remercie pour tout ce qu'ils m'ont appris.

Je souhaite remercier Nicolas. Il fut un très bon conseiller et il m'indiqua de nouvelles pistes qui s'avèrent fructueuses pour faire avancer mes recherches. Nicolas est également un excellent orateur qui possède un don pour présenter agréablement des idées complexes, il fût un modèle pour moi dans ce domaine. Je le remercie pour la façon dont il s'est investi dans cette thèse : grâce à lui, j'ai pu travailler dans différents laboratoires (entre autre le CMM à Santiago du Chili), rencontrer de nombreuses personnes et découvrir de nouveaux horizons. Je le remercie également pour l'aide matérielle et morale qu'il m'a fourni dans des moments difficiles (j'ai une fâcheuse tendance à perdre mes affaires à des moments critiques). Enfin, je le remercie pour sa bonne humeur qui a rendu ses trois années plus agréables.

Je remercie Éric pour tout le temps passé ensemble à remplir des tableaux de calculs, formules et dessins en tout genre et cela jusqu'à des heures tardives. Il m'a grandement aidé à peaufiner mes résultats jusque dans les petits détails et à clarifier mes idées. De plus, son caractère extrêmement agréable a rendu ces travaux réellement plaisants. Travailler avec lui fût un vrai plaisir.

Je remercie mes relecteurs Bernard Ycart, Cristopher Moore et Alexander Shen pour avoir accepté de relire cette thèse et pour les commentaires et les améliorations qu'ils m'ont suggérés. En plus des personnes citées précédemment, je tiens également à remercier Jean Mairesse et Pascal Koiran pour leur présence lors de ma soutenance en tant que membre du jury. Je remercie également toutes les autres personnes qui sont venues y assister.

Je souhaite remercier tous mes amis rencontrés au fur et à mesure des différents changements de bureau ou autres occasions : Sylvain Sené et Mathilde, Florent Becker et Camille, Julien Robert et Nolwenn, Victor Poupet, Emmanuel Agullo et Amélie, Vincent Nesme, Laurent Lyaudet, Guillaume Melquiond, Stéphane Leroux, Guillaume Révy et Clémence, Jean-Baptiste Rouquier, Nazim Fatès, Laurent Jouhet. Les discussions et soirées passées avec eux sont d'excellents souvenirs et m'ont permis de me changer les idées.

Je remercie également particulièrement Jacques Mazoyer et Marianne Delorme pour tous les conseils qu'ils m'ont donnés. Je souhaite également remercier Natacha Portier, Pascal Koiran, Eric Boix et son équipe, Sylvain Perifel, Emmanuel Jeandel, Andrei Romashchenko, Irénée Briquel, Sylvain Chevillard, Florent Bouchez, Barbara Petit, Edwige Royboz, Isabelle Pera, Anne benoît, Michel Morvan et toutes les autres personnes qui ont contribué à faire de l'IXXI et du LIP un endroit chaleureux et agréable à travailler.

Je souhaite aussi adresser mes remerciements aux membres du CMM de Santiago du Chili qui m'ont accueilli à plusieurs reprises. Je remercie également les membres du Liafa où j'ai régulièrement effectué des allers-retours.

Je remercie également ma mère Anne-Marie (qui a notamment contribué à diminuer grandement le nombre de fautes dans ce manuscrit), mon frère Philippe et sa compagne Isabelle et tout le reste de ma famille pour leur soutien, avec une pensée particulière pour mon père.

Je souhaite aussi remercier mes amis d'enfance Florian Abraham et Nicolas Belin. Je remercie Alice Julien-Laferrrière, ma professeur de violon. Enfin, je remercie également toutes les personnes que j'ai croisées et appréciées au cours des années et dont le nom n'est pas cité ici.

Introduction

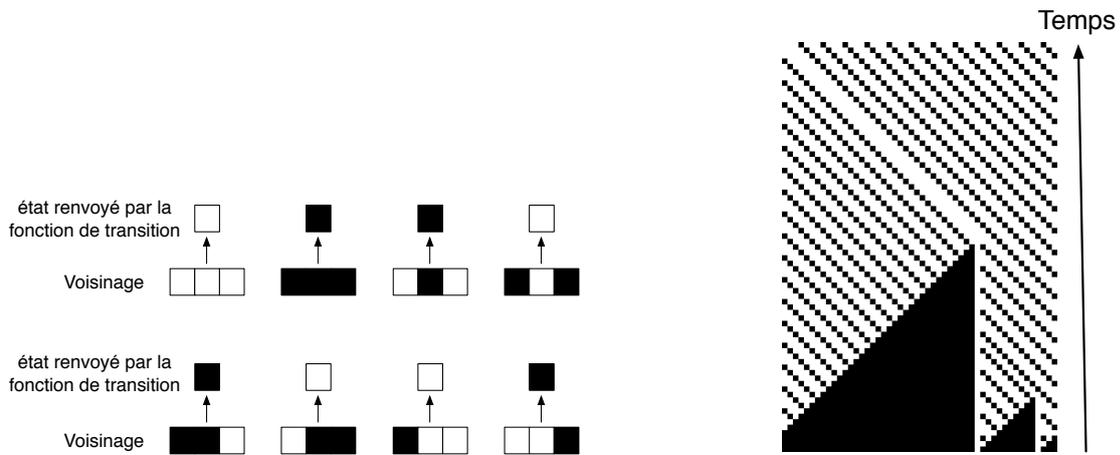
Les automates cellulaires sont des objets mathématiques simples à décrire mais dont l'analyse peut s'avérer extrêmement compliquée. Considérons des cellules, chacune étant caractérisée par un état, placées sur une ligne (dimension 1) ou sur une grille (dimension 2). Un automate cellulaire est défini par une fonction de transition et un voisinage. En dimension 1, le voisinage typique d'une cellule contient ses deux voisines les plus proches et elle-même. En dimension 2, les deux voisinages d'une cellule les plus usités contiennent outre cette cellule, soit ses quatre voisines les plus proches (voisinage de von Neumann), soit ses huit voisines les plus proches (voisinage de Moore). Quand une cellule se met à jour, elle change son état selon la règle de transition de l'automate en fonction des états des cellules de son voisinage. La règle de transition de l'automate est la même pour toutes les cellules. Le temps est discret et classiquement, à chaque pas de calcul, toutes les cellules se mettent à jour. Cette dynamique est appelée *synchrone* (également appelée *parallèle*). La figure 1 est un exemple d'automate cellulaire défini de la façon suivante :

- deux états 0 (blanc) et 1 (noir).
- une configuration torique faite de 50 cellules.
- le voisinage d'une cellule comprend la cellule et ses deux voisines les plus proches.
- la figure 1a) représente la fonction de transition.

La figure 1b) représente une exécution de cet automate cellulaire en dynamique synchrone (ce type de figure est appelé un *diagramme espace-temps*) : chaque ligne représente une configuration à un instant t , le temps s'écoule vers le haut.

Les automates cellulaires ont été beaucoup étudiés sous la dynamique synchrone : quels calculs sont-ils capables de faire ? Comment les font-ils ? À quelle vitesse ? Combien d'états faut-il au minimum ? Que se passe-t-il en considérant des voisinages plus grands ? Des voisinages à trous ? Des dimensions plus grandes ? Dans cette thèse, nous étudions les automates cellulaires en en modifiant la dynamique. Nous allons considérer deux dynamiques probabilistes où, à chaque pas de temps, un sous-ensemble de cellules choisies aléatoirement se met à jour. La première est appelée dynamique *totalelement asynchrone* (également appelée *séquentielle* ou *série* dans la littérature). Sous cette dynamique, à chaque pas de temps, une seule cellule est choisie aléatoirement de manière uniforme et seule cette cellule se met à jour. La deuxième est appelée dynamique α -*asynchrone*. Sous cette dynamique, à chaque pas de temps, chaque cellule a une probabilité α de se mettre à jour indépendamment les unes des autres. Ces deux dynamiques n'ont été que très peu étudiées et, comme nous le verrons, l'insertion de probabilités nécessite de développer des outils spécifiques.

Les automates cellulaires peuvent être perçus de nombreuses façons. Nous présentons dans cette introduction deux de leurs aspects : les automates cellulaires comme un moyen de simuler des phénomènes réels et les automates cellulaires en tant que modèle de calcul. Nous réutiliserons certains des outils et des méthodologies développés dans ces deux domaines.



a) La fonction de transition de l'automate

b) Un diagramme espace-temps à partir d'une configuration initiale consistant en 2 segments noirs séparés par 2 cellules blanches.

FIG. 1 – Un exemple d'automate cellulaire et un diagramme espace temps de sa dynamique synchrone.

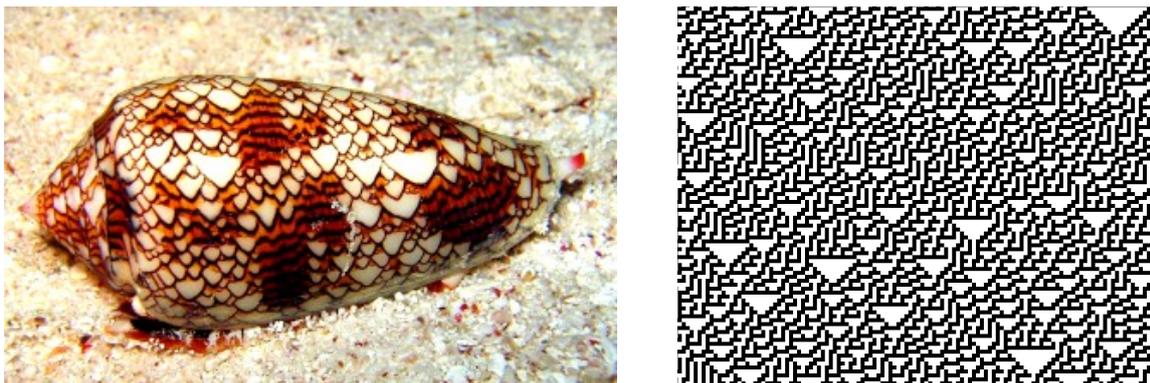
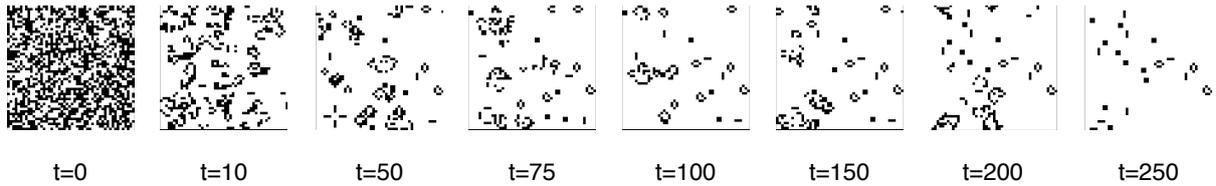


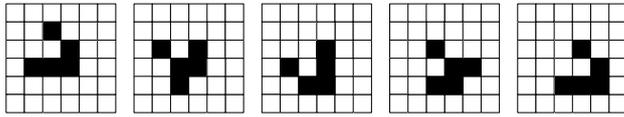
FIG. 2 – Le motif sur le coquillage de l'espèce *Conus textile* est créé par une fonction mathématique présentant des similarités avec la règle de l'automate cellulaire 30 (numérotation de Wolfram [88]).

Les origines. Au cours du siècle dernier, de nombreux systèmes réels issus de la biologie, de la physique, des sciences sociales ou économiques furent modélisés par des objets mathématiques. L'analyse théorique de ces objets mathématiques a permis de mieux comprendre le fonctionnement de ces systèmes. En 1925, le modèle d'Ising [46] fut introduit pour étudier le ferromagnétisme. En 1927, Kermack et McKendrick [52] modélisèrent la propagation d'épidémies sous forme d'équations mathématiques. En 1943, McCulloch et Pitts [60] introduisirent un automate à seuil pour simuler un neurone et montrèrent qu'un réseau de tels automates était capable de calculer des fonctions logiques complexes. En 1957, Broadbent et Hammersley [9] présentèrent un modèle probabiliste simple pour modéliser la percolation (i.e. pour étudier le degré de porosité nécessaire pour qu'un liquide puisse traverser un matériau). Quant aux automates cellulaires, ils apparurent dans les années 1940-1950. À l'époque, les travaux d'Avery *et al* [2] venaient de mettre en avant le rôle de l'ADN dans l'hérédité. À la fin des années 40, von Neumann essayait de créer une machine capable de s'autoreproduire. En 1952-1953 suite aux conseils d'Ulam qui travaillait sur la croissance des cristaux, il créa le premier automate cellulaire. Cet automate cellulaire particulièrement complexe (29 états) était capable, sur une configuration possédant un motif particulier (environ 200 000 cellules), de répliquer une infinité de fois ce motif. La preuve finale fut réalisée avec l'aide de Burks [66] en 1966. Ces différents modèles se révélèrent avoir des interconnexions entre-eux. Par exemple, le modèle d'Ising stochastique est en fait un automate cellulaire avec une dynamique issue d'expériences de physique statistique. Les automates cellulaires et les réseaux de neurones présentent aussi beaucoup de similarités. Le modèle d'Ising et la percolation furent unifiés dans le modèle de Potts [41]. Les travaux de Demany et Kinzel [15] montrent les liens entre les automates cellulaires et la percolation. Les travaux de Fatès [25] montrent expérimentalement que ces liens existent aussi dans une classe d'automates cellulaires étudiée dans cette thèse, liens que nous avons prouvés formellement dans [78]. Également, ces modèles eurent d'autres applications que celles initialement voulues. Le modèle d'Ising stochastique modélise aussi des gaz ou des mélanges de liquides (par exemple eau et huile). Les réseaux de neurones se révèlent être un bon modèle pour l'apprentissage (voir le chapitre 4 du livre de Mitchell [62]). Dans son livre, Grimmett [40] présente d'autres utilisations de la percolation comme calculer la résistance effective de mélanges de métaux. Les automates cellulaires, outre le lien évident avec le modèle d'Ising stochastique et donc le ferromagnétisme, servent aussi à Nagel et Schreckenberg [65] pour modéliser la circulation automobile, ou à modéliser certains phénomènes biologiques : croissance de coquillage (voir figure 2), évolution de colonies de bactéries dans les travaux de Kerr *et al* [53]. Dans le domaine de l'épidémiologie, des études de Durrett, Levin [17] et Mollison [63] montrent que les modèles continus peuvent amener à des aberrations et les automates cellulaires se révèlent être un outil efficace dans les travaux de Fukš, Lawniczak [32] et Schönfisch [84] pour modéliser la propagation d'épidémies. Également, ils furent adoptés comme modèle du calcul parallèle. En effet, certains automates cellulaires ont un comportement particulièrement sophistiqué : ils sont capables d'effectuer n'importe quel calcul (voir l'historique détaillé de N. Ollinger [69]).

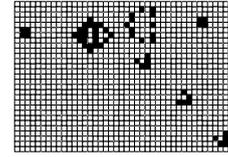
Les automates cellulaires synchrones (voir l'historique de J. Kari [51]). Les automates cellulaires présentent une grande variété de comportements. Au cours des années, certains automates cellulaires ou classes d'automates cellulaires sortirent du lot à cause de leur comportement particulier. Exhiber ces automates cellulaires permet de comprendre ce qui faisait leur richesse. Dans les années 70 apparut le *jeu de la vie* de J. H. Conway [36]. Cet automate cellulaire se révéla être capable de faire des calculs arbitraires. Les travaux de Gosper (publié dans le livre de Gardner [37]) et de Berlekamp *et al* [5] mirent en place les différentes pièces qui ont permis à Rendell de finalement prouver ce résultat (résultat publié dans le livre de Adamatzky [1]). De plus, le jeu de la vie permet de visualiser (voir fig. 3) la façon dont les calculs sont effectués : par



a) Une exécution du jeu de la vie sur une configuration torique 50 x 50.



b) Un signal (appelé planeur dans le cas du jeu de la vie) se déplaçant dans la configuration : au bout de 4 itérations, le motif s'est déplacé d'une case vers le bas et d'une case vers la droite.

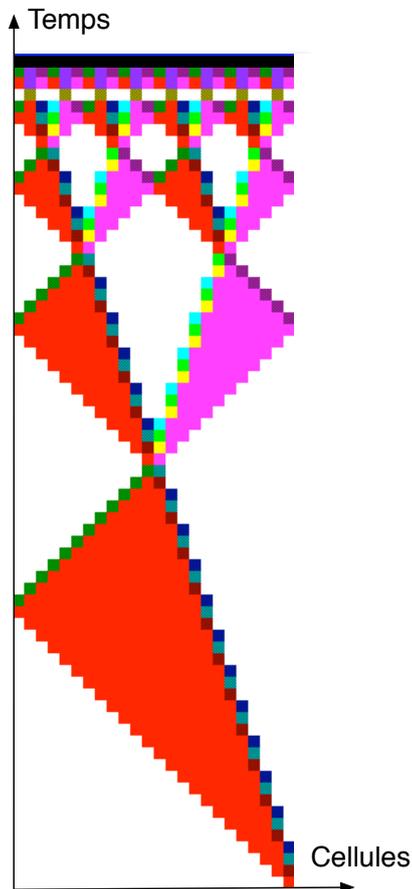


c) Le canon à planeurs de Gosper : tous les 30 pas de temps, un nouveau planeur est émis.

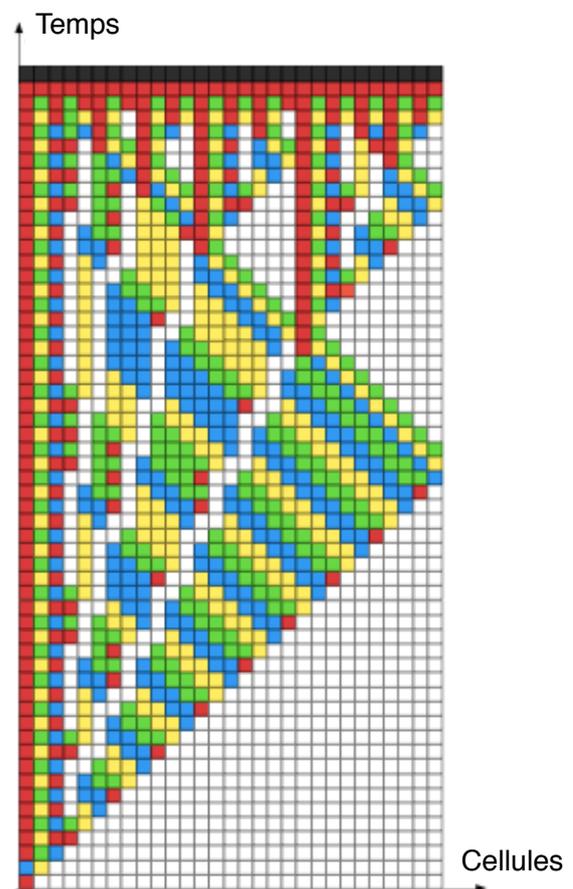
FIG. 3 – Le jeu de la vie.

des échanges de signaux. La configuration est recouverte par un "motif de fond" où les cellules ne changent pas d'état (les cellules blanches dans le cas du jeu de la vie). Des motifs particuliers sont capables de se déplacer sur ce fond (voir fig. 3b). Ces motifs sont généralement appelés *signaux* ou *particules*. Quand ces signaux se croisent, ils meurent ou émettent de nouveaux signaux dans différentes directions (voir fig. 3c). De très nombreux travaux furent consacrés pour comprendre la manière dont les calculs sont effectués par ces signaux. Crutchfield et Hanson [14] cherchent à détecter la formation du motif de fond. Eloranta [20, 21] et Pivato [73] étudient les automates cellulaires défectueux pour comprendre comment différents motifs de fond évoluent côte à côte. Ces signaux furent également réutilisés pour construire des algorithmes (voir le livre d'Adamatzky [1]). Citons le problème de la ligne de fusiliers qui consiste à synchroniser à partir d'une unique cellule toute une ligne de cellules pour qu'elles passent en même temps pour la première fois dans un état donné (dit l'état "feu"). Les travaux de Mazoyer [58, 59] donnent une solution optimale en temps avec seulement 6 états (voir figure 4). Cet algorithme est souvent réutilisé dans d'autres algorithmes pour synchroniser les cellules. Néanmoins, il n'existe toujours pas de définitions formelles des signaux, ni des zones [73].

Après avoir exhibé ces comportements, il y eut des tentatives de classifications des automates cellulaires en fonction de leur diagramme espace-temps. La plus connue est celle de Wolfram [88] qui sépare les automates cellulaires en quatre classes. La première classe regroupe les automates cellulaires nilpotents qui, de toutes configurations initiales, atteignent une configuration uniforme. La deuxième classe regroupe les automates cellulaires périodiques incluant ceux qui atteignent une configuration stable non uniforme. La troisième classe regroupe les automates cellulaires chaotiques qui sont apériodiques et ne présentent pas de structures particulières. La quatrième classe regroupe des automates cellulaires capables de créer des motifs complexes pouvant se déplacer et interagir dans la configuration. Cette classification est peu satisfaisante car les définitions des classes ne sont pas formelles et ne reposent que sur des simulations. Récemment dans les thèses de Rapaport [75], Ollinger [67] et Theyssier [86], la compréhension de la mécanique des automates cellulaires a abouti à une hiérarchisation de leurs comportements. En haut se trouve la classe des automates cellulaires intrinsèquement universels, capables de simuler les diagrammes espace-temps de n'importe quel autre automate cellulaire. Ensuite, se trouve la classe des automates cellulaires Turing-universels capables de faire tous les calculs dont sont capables les autres automates cellulaires. En bas de la classification, se trouvent les



Une solution où les signaux procèdent à une dichotomie de la configuration (source de l'image : http://en.wikipedia.org/wiki/Firing_squad_synchronization_problem).



La solution de Mazoyer [58] : optimale en temps et avec seulement 6 états (L'image provient des travaux de Duprat [16] qui prouva en Coq le bon fonctionnement de cet algorithme).

FIG. 4 – Le problème de la ligne de fusiliers ou comment synchroniser à partir d'une unique cellule toutes les cellules disposées sur une ligne pour qu'elles passent en même temps dans l'état feu (ici de couleur noire)? Un parfait exemple d'algorithme à base de signaux.

automates au comportement "simple" : automates à un état, nilpotents, périodiques, etc. Les résultats de Kari [49, 50] et Ollinger [68] ont montré que déterminer si un automate cellulaire appartient à une classe donnée est généralement indécidable. Cette hiérarchie ne nous donne pas non plus de description générale du comportement des automates cellulaires à l'intérieur de cette classification.

La résistance aux pannes. Les automates cellulaires Turing-universels nécessitent d'être extrêmement précis dans la définition de la configuration initiale. La variation d'une seule cellule peut entraîner des modifications importantes à long terme. Il semblait donc difficile de construire un automate cellulaire Turing-universel avec une dynamique probabiliste.

Dans le but de créer un automate cellulaire résistant aux erreurs, la dynamique suivante a été étudiée : les cellules se mettent à jour de façon synchrone mais à chaque pas de temps, chaque cellule à une probabilité ϵ de faire une erreur. Une cellule qui commet une erreur passe dans un état qui est choisi par un adversaire malveillant. Il est donc plus difficile de faire des calculs avec un taux d'erreurs ϵ qu'en dynamique α -asynchrone avec $\alpha = 1 - \epsilon$ car l'adversaire peut choisir l'erreur qui posera le plus de problème à notre automate cellulaire. Dans [87], Toom définit un automate cellulaire 2D simple (2 états) capable de mémoriser un bit d'information en présence d'erreurs. Ce résultat fut simplifié et amélioré par Berman et Simon [6] et réutilisé par Gács et Reif [35] pour définir un automate 3D capable de faire des calculs fiables en présence d'erreurs. Plus tard, Gács prouva un résultat équivalent pour les automates 2D [33] puis 1D [34]. Ces résultats montrent qu'il est possible de faire des calculs même en présence d'un faible taux d'erreurs et donc également en dynamique α -asynchrone quand α est proche de 1. Néanmoins, le fonctionnement de ces automates cellulaires consiste à superposer un automate cellulaire Turing-puissant en régime synchrone et un code correcteur d'erreurs. Quand les erreurs sont suffisamment diffuses, le code correcteur les élimine et les calculs peuvent avoir lieu de manière stable. Malheureusement dans le cas 1D et 2D, cela fait exploser le nombre d'états et le taux d'erreurs doit être très faible. Dans le cas de l'automate 1D fabriqué par Gács, Gray [39] conjecture qu'il possède au moins 2^{32} états et que $\epsilon < 2^{-960}$. Ces travaux consacrés à la construction d'automates cellulaires résistants aux pannes n'explorent donc pas le comportement typique de la dynamique α -asynchrone d'automates cellulaires en général.

Les automates cellulaires probabilistes. Beaucoup d'études expérimentales dont celles de Buvel et Ingerson [11], de Kanada [47], de Bersini et Detours [7], de Schönfish et Roos [83] et de Fatés et Morvan [26] ont montré que le comportement des automates cellulaires évoluant sous une dynamique probabiliste varie énormément de leur comportement synchrone¹. La plupart des études réalisées ont porté sur les automates cellulaires 1D, soit sur un automate cellulaire en particulier dans le cas d'une première étude de Fukš [30], soit sur une classe spécifique dans le cas d'une deuxième étude de Fukš [31] et dans les travaux de Fatés *et al* [27]. Ces règles 1D sont le plus souvent "simples" (automates cellulaires élémentaires). Ces premiers résultats montrent que les structures des diagrammes espace-temps présentes dans la dynamique synchrone n'existent plus sous la dynamique totalement asynchrone. Le comportement des automates cellulaires élémentaires sous la dynamique totalement asynchrone est souvent plus simple que dans le cas synchrone. L'insertion de probabilités est connue pour lisser le comportement des systèmes dynamiques discrets. Avant nos travaux, Fatés [24] n'avait étudié qu'expérimentalement la dynamique α -asynchrone et des transitions de phase quand α varie avaient été mises en évidence. Par exemple, l'automate cellulaire 146 (notation de Wolfram [88]) présente un tel comportement (voir figure 5) : il existe une valeur $\alpha_c \approx 0.6$ telle que l'automate cellulaire met un temps polynomial en la taille de la configuration pour atteindre une configuration stable quand $\alpha < \alpha_c$ et

¹Citons également les travaux de Lumer et Nicolis [57] sur les systèmes discrets.

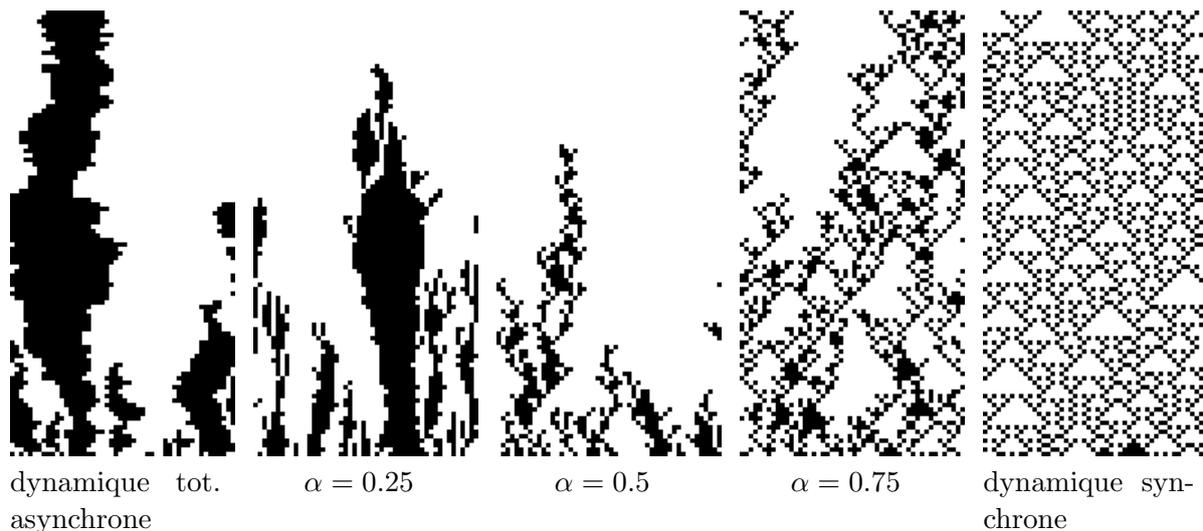


FIG. 5 – L’automate cellulaire 146 présente une transition de phase quand le taux d’asynchronisme varie : le temps de convergence vers tout blanc est exponentiel quand $\alpha > \alpha_c \approx 0.6$ et polynomial quand $\alpha < \alpha_c$

un temps exponentiel en la taille de la configuration quand $\alpha > \alpha_c$. En 2D, Bollobás *et al* [3] ont essayé une approche par la méthode des champs moyens et leurs résultats ont montré qu’il est difficile de prévoir le comportement des dynamiques probabilistes par cette méthode, laissant supposer qu’il existe des comportements plus sophistiqués.

Les outils à notre disposition. Il y a deux types d’approches classiques pour l’étude des automates cellulaires. Sous la dynamique synchrone, les travaux antérieurs ont étudié les événements les plus compliqués réalisables avec des automates cellulaires. Mais pour d’autres communautés, les automates cellulaires sont un modèle, parmi d’autres, pour représenter des phénomènes réels. Ces autres modèles sont souvent probabilistes (percolation, modèle d’Ising stochastique, réseaux de neurones, ...). D’ailleurs les travaux de Kerr *et al* [53] sur les colonies de bactéries et les travaux de Nagel et Schreckenberg [65] sur le trafic routier, cités auparavant, utilisent une dynamique probabiliste. Une évolution déterministe stricte de toutes les cellules n’est généralement pas considérée comme une hypothèse raisonnable pour simuler des systèmes réels.

Dans ces études, les règles considérées sont généralement simples. Bien que Cook [13] ait prouvé que des règles simples puissent avoir la puissance Turing, les seules règles connues résistant à l’asynchronisme des mises à jour sont compliquées. Les questions abordées ne touchent pas a priori des problèmes de calculabilité mais des questions du type : quel est le comportement à long terme ? Quelle est la densité d’un état ? De plus, avoir recours à des simulations permet de fournir une piste pour comprendre le fonctionnement de l’objet considéré et souvent de formuler des conjectures. Le but de cette thèse est d’expliquer mathématiquement des comportements observés expérimentalement. Malheureusement, prouver ces observations demande souvent un effort considérable, même pour celles semblant à première vue évidentes. Ces efforts sont néanmoins nécessaires : le comportement de l’objet n’est pas forcément celui constaté au premier abord (voir figure 6) et prouver les observations faites permet de comprendre les mécanismes qui les provoquent. Ainsi, les renseignements fournis ou les comportements précis exhibés par ces analyses sont utiles pour se poser des questions pertinentes qui n’auraient pas été soulevées sans elles. Ces analyses nécessitent d’utiliser des outils développés en théorie des

Temps (seulement une configuration tous les 50 pas de temps est affichée)



FIG. 6 – Fatés *et al* [27] ont prouvé que cet automate (ACE 210) converge presque sûrement vers la configuration toute blanche en dynamique totalement asynchrone.

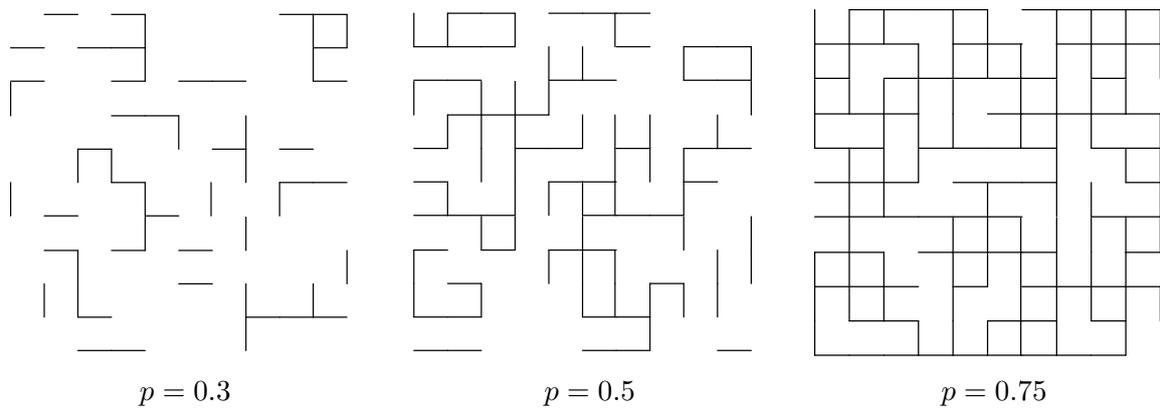


FIG. 7 – Différents exemples de percolation sur \mathbb{Z}^2 . Seules les arêtes ouvertes sont dessinées.

probabilités. Nous utiliserons principalement des théorèmes sur les fonctions potentielles (voir le livre de probabilité de Grimmett et Stirzaker sur les fonctions de Lyapunov [42]) et sur le couplage (technique approfondie dans la thèse de Randall [74]). Adapter ces techniques nous a permis d’obtenir des résultats. Il existe déjà des études pour d’autres modèles, nous en avons déjà cité certains, et nous nous sommes également appuyés sur des techniques existantes. Nous allons maintenant passer en revue les modèles qui nous intéressent dans cette thèse.

La percolation. Jetons une pierre poreuse dans de l’eau. Le centre de la pierre sera-t-il mouillé ? Ce problème se modélise classiquement en considérant un graphe dont les sommets sont placés sur une grille \mathbb{Z}^2 . Chaque sommet est relié par une arête à ses 4 voisins les plus proches. Chaque arête a une probabilité p d’être ouverte et $1 - p$ d’être fermée. La taille de la pierre étant grande comparée à la taille des trous, on suppose que la grille est infinie et on se pose donc la question suivante : existe-t-il un chemin d’arêtes ouvertes infini ? Cette question a occupé et continue à occuper toute une communauté, les résultats les plus importants peuvent être trouvés dans le livre de Grimmett [40]. Le principal résultat est l’existence d’une valeur $p_c = 0.5$ tel que si $p \leq p_c$ alors il n’existe presque sûrement pas un tel chemin. Par contre si $p > p_c$ alors il existe une probabilité strictement positive qu’un tel chemin existe (voir figure 7).

Les réseaux de neurones. Les neurones sont placés sur un graphe. Ils sont soit inhibés, soit désinhibés. Les arêtes reçoivent un poids. Les réseaux de neurones évoluent généralement de façon totalement asynchrone. À chaque pas de temps, un neurone est sélectionné et se met

à jour de la façon suivante : il fait la somme des poids des arêtes qui le relie à des voisins inhibés, si cette somme est plus grande que la valeur de seuil attribuée à ce neurone alors il devient inhibé, sinon il devient désinhibé. Il y a eu de nombreuses études pour déterminer le comportement à long terme de ces réseaux de neurones. Les travaux de Goles ont donné des conditions qui, si elles sont respectées par le réseau de neurones, montrent que ce réseau atteint presque sûrement en dynamique totalement asynchrone une configuration stable, et en dynamique synchrone une configuration stable ou un cycle de longueur 2. Plus tard, Hopfield [44] a obtenu des résultats similaires en utilisant une fonction d'énergie issue de travaux en physique statistique. Notons que l'apparition de cette fonction d'énergie montre le lien entre ces modèles et les phénomènes réels. La mise en évidence de cette fonction, qui ne peut que décroître avec le temps, apporte de précieuses informations sur les configurations. De plus, les travaux d'Hopfield relancèrent également l'intérêt des recherches sur les réseaux de neurones en temps qu'outils pour mémoriser/reconnaître des formes. Dans cette thèse, nous réutiliserons cette fonction d'énergie dans le chapitre II pour étudier un automate cellulaire qui se révélera être un réseau d'Hopfield mais dont la preuve de la convergence n'est pas couverte par les théorèmes cités précédemment. L'ensemble des travaux cités ici est présenté dans le livre de Goles [38].

Le modèle d'Ising stochastique et les systèmes de particules en interaction. Des particules sont placées sur une grille \mathbb{Z}^2 . Une particule x est caractérisée par un nombre de spin $\sigma(x) \in \{+1, -1\}$ représentant son orientation magnétique. La fonction σ est appelée la configuration du système qui associe à chaque particule un nombre de spin. Deux particules d'orientations différentes ont tendance à se repousser. Ainsi l'énergie $H(\sigma)$ d'une configuration est définie par le nombre d'interactions entre particules voisines d'orientations différentes :

$$H(\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{x,y \text{ voisins}} \sigma(x)\sigma(y) + \text{constante}.$$

Le système cherche naturellement à minimiser son énergie. Mais il est soumis à une température T qui peut le perturber. La dynamique de Glauber à température inverse $\beta \in (0, \infty)$ est le processus de Markov à temps continu $X = (X(t))_{t \geq 0}$ sur l'ensemble des configurations où le taux de transition entre deux configurations σ et σ' ne diffèrent que sur une seule particule est

$$c(\sigma, \sigma') = \exp\{\beta[H(\sigma') - H(\sigma)]_+\}.$$

Les travaux de Peierls [71] ont prouvé l'existence d'une transition de phase quand la température croît. Quand la température est sous-critique, on constate la formation de régions à l'intérieur desquelles les particules sont de même orientation. Quand la température est super-critique, on ne distingue plus de régions et les spins des particules, orientées aussi bien dans un sens que dans l'autre, sont sans ordre apparent (voir image 8). Onsager[70] calcula la valeur critique dans le cas du champ nul.

Le modèle d'Ising stochastique est un système de particules [55]. Certains de ces modèles (modèle d'Ising stochastique antiferromagnétique, modèle des anti-voteurs [56]) présentent de fortes ressemblances avec la règle Minorité sur les automates cellulaires 2D qui sera l'objet de nos études dans la partie II. Nous avons choisi d'étudier des réseaux d'automates hors équilibre. Ainsi à la différence des systèmes de particules en interaction, notre modèle admet des transitions irréversibles, ce qui induit des changements macroscopiques importants, et nous nous intéresserons au temps de relaxation, *i.e.* le temps nécessaire pour atteindre le comportement limite où plus aucune transition irréversible n'est possible.

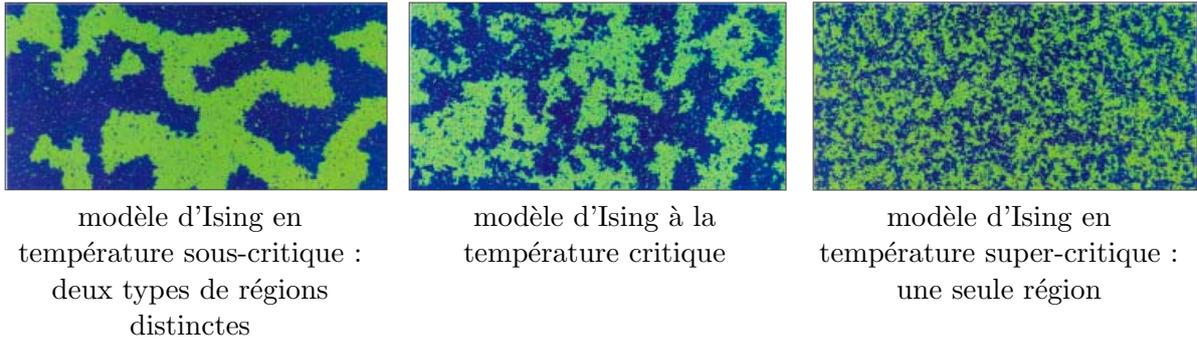


FIG. 8 – Le modèle d'Ising (images reprises de l'article de Cerf [12]).

Le modèle d'invasion par amorces (Bootstrap Model). Considérons un graphe où les nœuds sont soit sains, soit contaminés. Un nœud contaminé restera toujours contaminé, un nœud sain devient contaminé si plus de la moitié de ses voisins sont contaminés. Ici, la dynamique n'a pas d'importance, seule la configuration initiale déterminera l'état final du système. Le but est de savoir quelle quantité de sommets doit être initialement contaminée pour que l'épidémie s'étende à tout le graphe. Plusieurs variantes de cette règle ont été étudiées sur différentes topologies (voir les travaux de Holfoyd [43] et l'historique de Peleg [72]). Sur les hypercubes, Balogh *et al* [4] ont montré l'existence d'une valeur $p_c = 1/2$ tel que si initialement un sommet est infecté avec probabilité $p < p_c$ alors la probabilité que tous les sommets soient infectés tend vers 0 quand la taille de l'hypercube tend vers l'infini ; et si initialement un sommet est infecté avec probabilité $p > p_c$ alors la probabilité que tous les sommets soient infectés tend vers 1 quand la taille de l'hypercube tend vers l'infini. Il existe des classes de graphes qui nécessitent moins d'un sommet sur deux initialement contaminé pour être entièrement contaminées : Rapaport *et al* [76] ont exhibé une classe de graphes où si initialement chaque sommet est infecté avec probabilité $p > 0.372$ alors la probabilité que tous les sommets soient infectés tend vers 1 quand la taille du graphe tend vers l'infini.

Les jeux sur les graphes. D'autres modèles, moins célèbres que celui du modèle d'invasion par amorces, furent étudiés sur les arbres. Citons le jeu de Pierre-Feuille-Ciseau qui modélise l'évolution des colonies de bactéries dans les travaux de Kerr *et al* [53] : les nœuds du graphe sont dans l'état Pierre, Feuille ou Ciseau. Une arête est tirée aléatoirement : si ses deux extrémités sont dans un état différent, l'extrémité perdante passe dans l'état du vainqueur (Pierre gagne sur Ciseau, Ciseau gagne sur Feuille, Feuille gagne sur Pierre). Il y eut également une généralisation du Dilemme du Prisonnier sur les graphes introduite par Kittock [54] : les nœuds du graphe sont dans l'état Coopérer ou Dénoncer. Une arête est tirée aléatoirement : si ses deux extrémités coopèrent alors elles continuent de coopérer, si ses deux extrémités se dénoncent alors elles décident de coopérer et dans les autres cas l'extrémité qui coopère passe dans l'état Dénoncer. Il est évident qu'une telle dynamique converge à long terme vers une configuration où tout le monde coopère. Par contre le temps pour atteindre cette configuration varie selon la topologie du graphe. Dyer *et al* [18] ont étudié différentes topologies : l'étoile, le cycle et la clique. La question du temps de convergence sur les arbres à degré borné fut laissée à l'état de conjecture durant un certain temps. Mais récemment, il fut prouvé par Mossel et Roch [64] que le jeu du Dilemme du Prisonnier peut mettre un temps exponentiel à converger sur cette topologie. Cette preuve est particulièrement intéressante dans notre cas car cette dynamique sur les arbres ressemble beaucoup à un automate cellulaire probabiliste 1D. De plus la preuve de convergence adapte une preuve issue de la percolation. Ces travaux utilisent une méthode similaire à celle que nous avons développée indépendamment dans [78] et que nous verrons dans le chapitre I. Enfin

notons que dans les travaux de Messica *et al* [61, 29], les études d’algorithmes sur des systèmes distribués (passage de jetons, ...) peuvent se ramener à de tels jeux. De plus, la topologie en anneau est courante sur ces systèmes; ceci est un bon exemple d’application des automates cellulaires 1D à configuration finie torique.

L’étude de la dynamique totalement asynchrone en dimension 1. L’étude systématique de la dynamique totalement asynchrone en dimension 1 a été amorcée par Fatés, Morvan, Schabanel et Thierry [27]. Pour étudier les effets de cette dynamique, ils ont choisi d’étudier une classe d’automates cellulaires appelées automates cellulaires élémentaires doublement quiescents (ACEDQ), sous-classe des automates cellulaires élémentaires (ACE). Ces automates cellulaires 1D sont définis simplement mais présentent déjà une grande richesse de comportements. Les auteurs les ont classés en fonction de l’espérance de leur *temps de relaxation* (i.e. du temps nécessaire pour atteindre une configuration stable). Ce paramètre permet de savoir si le comportement observé expérimentalement est bien le comportement à long terme de l’automate cellulaire. Leurs résultats sont présentés dans le tableau 9 (tiré de [27]). Le numéro associé à un ACE provient de la notation de Wolfram [88] et le nom de la règle provient d’une notation introduite dans l’article [27]. Les ACEDQ ont la particularité que l’intérieur des grandes régions noires et blanches est stable. Ainsi caractériser un ACEDQ revient à décrire le mouvement des frontières entre régions blanche/noire et noire/blanche (ces mouvements sont représentés par les flèches dans le tableau) et la disparition ou la résilience des régions de taille 1 (une croix représente le fait qu’une cellule isolée peut disparaître) et cette analyse a permis de décrire précisément le comportement des diagrammes espace-temps.

Les mouvements des frontières entre les régions s’apparentent à des processus de marches aléatoires et la mort des régions à des processus de collectionneurs de coupons. Ainsi, les preuves consistent à expliciter les mécanismes d’évolution apparaissant dans le comportement de l’automate cellulaire, de comprendre leurs interactions et finalement de quantifier leurs effets. Plus tard les travaux de Gerin et Chassaing [22] ont réutilisé ces preuves pour prouver l’équivalence entre ces automates cellulaires évoluant sur des configurations initiales bien choisies et ces processus stochastiques. Ces mécanismes reproduisent parfois assez fidèlement le comportement de la dynamique synchrone, notamment pour les automates cellulaires exhibant un comportement simple (classe 1 et 2 de la classification de Wolfram). En revanche, les automates cellulaires plus sophistiqués voient leurs comportements se simplifier sous la dynamique totalement asynchrone.

Nos contributions

Dans cette thèse, nous étudions différents automates cellulaires sous différentes dynamiques asynchrones. Notre but principal est de développer des outils et des méthodes pour faciliter l’analyse de ces automates. Nos analyses visent à déterminer le temps de relaxation des automates. Ce paramètre permet, outre de savoir si le comportement observé par des simulations correspond au comportement à long terme, de séparer les automates en différentes classes et donc de trier les différents types de comportements que nous rencontrons au cours de nos études. De plus, comme nous l’avons vu précédemment, l’analyse du temps de relaxation de ces automates permet de comprendre et de décrire leur comportement. Nos preuves contiennent en effet une explication et une pondération des phénomènes intervenant dans les automates étudiés. Nos travaux sont divisés en trois parties : l’étude de la dimension 1, l’étude de la dimension 2 et enfin l’étude de topologies plus exotiques (arbres, cliques). Dans chaque cas, nous avons développé différentes techniques pour faire face aux problèmes posés :

- *étude de la dimension 1* : nous poursuivons l’étude de Fatés *et al* [27]. Mais cette fois-ci, nous nous consacrons à la dynamique α -asynchrone. Outre les phénomènes de marches

Comportement	ACE (#)	Règle	01	10	010	101	Convergence
Identité	204 (1)	∅	•	•	•	•	0
Collecteur de Coupons	200 (2)	E	•	•	✓	•	$\Theta(n \ln n)$
	232 (1)	DE	•	•	✓	✓	
Monotone	206 (4)	B	←	•	•	•	$\Theta(n^2)$
	222 (2)	BC	←	→	•	•	
	234 (4)	BDE	←	•	✓	✓	
	250 (2)	BCDE	←	→	✓	✓	
	202 (4)	BE	←	•	✓	•	
	192 (4)	EF	→	•	✓	•	
	218 (2)	BCE	←	→	✓	•	
	128 (2)	EFG	→	←	✓	•	
Marche aléatoire biaisée	242 (4)	BCDEF	↔	→	✓	✓	$\Theta(n^3)$
	130 (4)	BEFG	↔	←	✓	•	
Marche aléatoire	226 (2)	BDEF	↔	•	✓	✓	$\Theta(n^3)$
	170 (2)	BDEG	←	←	✓	✓	
	178 (1)	BCDEFG	↔	↔	✓	✓	
	194 (4)	BEF	↔	•	✓	•	
	138 (4)	BEG	←	←	✓	•	
	146 (2)	BCEFG	↔	↔	✓	•	
M. a. biaisée	210 (4)	BCEF	↔	→	✓	•	$\Theta(n2^n)$
Divergent	198 (2)	BF	↔	•	•	•	Divergent
	142 (2)	BG	←	←	•	•	
	214 (4)	BCF	↔	→	•	•	
	150 (1)	BCFG	↔	↔	•	•	

FIG. 9 – La classification du comportement des ACEDQ en régime totalement asynchrone.

aléatoires et de collectionneurs de coupon, nous devons faire face à des transitions de phase et des comportements très riches (multiplication des régions, interférence entre les différentes marches aléatoires, ...). Tous les automates étudiés ne sont néanmoins pas aussi complexes. Mais le nombre de mécanismes à prendre en compte et leur sophistication nous ont obligés à développer des outils originaux (bases de masques, arbres de masques, fonctions de poids locaux) pour faciliter l'énumération et la quantification de l'influence de ces phénomènes et finalement obtenir une fonction potentielle possédant les bonnes propriétés et prouvant ainsi la convergence en garantissant qu'aucun cas n'a été oublié.

- *étude de la dimension 2* : cette partie est consacrée à l'étude de Minorité $2D$. Cette règle est à *feedback* négatif. L'analyse de ce type de règle n'est pas encore maîtrisée. Minorité est donc un sujet d'étude idéal pour comprendre ce type de comportement. Cette fois-ci, nous devons faire face à l'évolution de formes aléatoires $2D$. Nous avons défini des frontières pour permettre de visualiser ces formes qui nous ont permis de définir des couplages avec d'autres processus $2D$ dominés par des marches aléatoires. Pour décrire l'évolution, nous avons proposé un formalisme graphique permettant de lire, comprendre et vérifier facilement la correction des preuves.
- *graphes d'automates* : le comportement de Minorité étant particulièrement intéressant, nous avons voulu poursuivre son étude sur un graphe quelconque en espérant tirer des informations supplémentaires sur cette règle. Nous avons obtenu un temps de relaxation toujours polynomial sur la clique, et souvent exponentiel sur les arbres. L'approche pour obtenir ces résultats est différente de ce que nous avons fait auparavant car nous agissons non seulement sur la configuration initiale mais aussi sur la topologie en créant des gadgets et en les assemblant pour obtenir le comportement recherché : celui d'une marche aléatoire biaisée.

Plan du document

Le document est structuré de la manière suivante : nous commençons par donner les définitions nécessaires, puis faisons un rappel sur la théorie des probabilités et enfin présentons les théorèmes sur les fonctions potentielles et la méthode du couplage que nous utilisons par la suite. Dans la première partie, nous étudions la dimension 1. Puis, la deuxième partie est consacrée à l'étude de Minorité $2D$ avec deux relations de voisinage : von Neumann et Moore. Dans la troisième partie, nous étudions de nouveau la règle Minorité mais sur des topologies plus exotiques. Enfin, nous terminons par une conclusion sur nos travaux.

Chapitre 1

Définitions et rappels de probabilités

Dans cette partie nous rappelons les notions de base en théorie des probabilités, introduisons les processus stochastiques que nous rencontrerons par la suite, définissons les automates cellulaires asynchrones et enfin présentons les théorèmes de probabilités qui nous seront utiles par la suite.

1.1 Probabilités

Rappel de Probabilités. Dans un premier temps nous faisons un rappel sur la théorie des probabilités. Nous simplifions volontairement certaines notions car nous présentons seulement celles qui nous sont utiles dans le cadre de cette thèse.

Définition 1.1 (Univers, résultat et événement) Soit Ω un ensemble appelé univers, on appelle $\omega \in \Omega$ un résultat et $A \subset \Omega$ un événement. Si $\omega \in A$, on dit que ω réalise A .

Définition 1.2 (σ -algèbre) Une σ -algèbre \mathcal{F} est une collection d'événements telle que :

- l'événement impossible \emptyset et l'événement certain Ω sont dans \mathcal{F} .
- Si A est dans \mathcal{F} , alors \bar{A} y est aussi.
- Si A_1, A_2, \dots sont dans \mathcal{F} , alors $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$ y est aussi.

Définition 1.3 (Mesure de probabilité) Une mesure de probabilité P sur (Ω, \mathcal{F}) est une fonction $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

- pour tout $A \in \mathcal{F}$, $0 \leq P(A) \leq 1$,
- $P(\Omega) = 1$,
- pour tous événements A_1, A_2, \dots deux à deux disjoints, $P(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$.

$P(A)$ est appelé la probabilité de l'événement A .

Définition 1.4 (Espace de probabilité) Un espace de probabilité est un triplet (Ω, \mathcal{F}, P) .

Définition 1.5 (Indépendance) Deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Définition 1.6 (Probabilité conditionnelle) La probabilité conditionnelle de A sachant B notée $P(A|B)$ est définie comme $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Définition 1.7 (Variable aléatoire discrète) Une variable aléatoire discrète définie sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) est une fonction $X : \Omega \rightarrow E$ où E est un ensemble dénombrable tel que pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{X = x\} = \{\omega; X(\omega) = x\}$ est un événement de \mathcal{F} . On dit que X prend ses valeurs dans E .

Définition 1.8 (Distribution de probabilité) La distribution de probabilité d'une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans E dénombrable est la fonction $\nu : E \rightarrow [0, 1]$ qui pour tout élément i de E lui associe $P(\{X = i\})$.

Certains comportements peuvent être modélisés par une variable aléatoire. Ainsi, dans la littérature, certaines variables aléatoires ont été analysées en détail. Nous ne présenterons ici que les variables aléatoires suivant une loi géométrique de paramètre p . Ces variables servent à modéliser la question suivante :

Une pièce lancée en l'air retombe avec probabilité p sur pile et avec probabilité $1 - p$ sur face. Combien de fois faut-il la lancer pour obtenir pile ?

Définition 1.9 (Loi géométrique de paramètre p) Soit $p \in [0, 1]$, une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p si pour tout $i \in \mathbb{N}^*$

$$P(X = i) = (1 - p)^{i-1}p.$$

Définition 1.10 (Convergence presque sûre) Une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires converge presque sûrement vers une variable aléatoire X si :

$$P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1.$$

Définition 1.11 (Espérance) Pour une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$ dénombrable, nous définissons son espérance $\mathbb{E}[X]$ comme :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E} xP(X = x).$$

Proposition fondamentale 1.12 (Linéarité de l'espérance) Soit une suite quelconque de variables aléatoires X_0, \dots, X_N alors

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^N X_i\right] = \sum_{i=0}^N \mathbb{E}(X_i).$$

Sous réserve que la somme est absolument convergente.

Définition 1.13 (Espérance conditionnelle) Pour une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$ dénombrable, nous définissons son espérance conditionnelle sachant l'événement A , notée $\mathbb{E}[X|A]$, comme :

$$\mathbb{E}[X|A] = \sum_{x \in E} xP(X = x|A).$$

Soit Y une autre variable aléatoire discrète prenant ses valeurs dans F , on peut définir la fonction $\Psi : F \rightarrow \mathbb{R}$ par $\Psi(y) = \mathbb{E}[X|Y = y]$ pour tout $y \in F$. On définit alors la variable aléatoire $\mathbb{E}[X|Y]$ comme $\Psi(Y)$.

Notation 1.14 (Suite indépendante et identiquement distribuée) Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) est une suite de variables aléatoires indépendantes et ayant la même distribution de probabilités.

Définition 1.15 (Processus stochastique discret) Un processus stochastique à temps discret est une suite de variables aléatoires discrètes $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ prenant leurs valeurs dans un ensemble E appelé l'ensemble des états. Si $X_t = i$ on dit que le processus est dans l'état i au temps t .

1.1.1 Chaînes de Markov

Les chaînes de Markov sont des processus stochastiques représentant, entre autres, les automates cellulaires asynchrones du point de vue de la théorie des probabilités.

Définition 1.16 (Chaîne de Markov homogène) Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ un processus stochastique à temps discret sur un ensemble d'états E . Ce processus est une chaîne de Markov homogène si pour tout entier $t \geq 0$ et pour toute suite d'états $i_0, i_1, \dots, i_{t-1}, i, j$,

$$P(X_{t+1} = j | X_t = i, X_{t-1} = i_{t-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{t+1} = j | X_t = i) = P(X_1 = j | X_0 = i)$$

Nous ne considérons ici que des chaînes de Markov homogènes. Par abus de langage, nous parlerons donc seulement de chaînes de Markov par la suite, homogènes étant sous-entendu.

Définition 1.17 (Matrice de transition) La matrice de transition $P = \{p_{ij}\}_{i,j \in E}$ d'une chaîne de Markov $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$p_{ij} = P(X_{t+1} = j | X_t = i).$$

Définition 1.18 (Distribution initiale) La variable aléatoire X_0 est appelée l'état initial et sa distribution de probabilité ν_0 , $\nu_0(i) = P(X_0 = i)$, est appelée la distribution initiale.

Définition 1.19 (Distribution) La distribution au temps t de la chaîne de Markov est le vecteur ligne ν_t , où $\nu_t(i) = P(X_t = i)$. Elle est déterminée par la distribution initiale et la matrice de transition P de la chaîne de Markov. Il s'ensuit que $\nu_{t+1} = \nu_t P$ et donc, en itérant, $\nu_t = \nu_0 P^t$.

Définition 1.20 (Distribution stationnaire) Une distribution ν^* est stationnaire si et seulement si pour tout $i \in E$, $\nu^*(i) \geq 0$, $\sum_{i \in E} \nu^*(i) = 1$ et $\nu^* = \nu^* P$.

Définition 1.21 (Graphe de transition) Le graphe orienté de transition, G , d'une chaîne de Markov est défini comme suit :

- son ensemble des sommets est l'ensemble des états E de la chaîne de Markov ;
- il existe un arc de l'état i vers l'état j si et seulement si $p_{ij} > 0$; et cet arc a un poids p_{ij} .

Définition 1.22 (Attracteur) Un attracteur A est un ensemble d'états fortement connexe maximal pour l'inclusion dans le graphe de transition de la chaîne de Markov. On parle parfois aussi de classe irréductible.

Définition 1.23 (Ensemble limite) L'ensemble limite \mathcal{A} est l'union de tous les attracteurs de la chaîne de Markov.

Définition 1.24 (État transitoire et état récurrent) Un état est récurrent si une chaîne de Markov passant par cet état y revient presque sûrement, sinon il est transitoire.

Dans le cas où l'ensemble des états est fini, alors un état est récurrent si et seulement s'il appartient à l'ensemble limite.

Définition 1.25 (Apériodique) Une chaîne de Markov est apériodique si pour tout sommet de son graphe de transition le PPCM de la longueur des cycles du graphe de transition passant par ce sommet est égal à 1.

Dans notre cas, nous ne considérons que des chaînes de Markov où pour tout état i , $p_{ii} > 0$. Ces chaînes de Markov sont donc toujours apériodiques.

Proposition 1.26 (Convergence) Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une chaîne de Markov apériodique définie sur un ensemble fini d'états et une distribution initiale ν_0 . La suite de distributions $(\nu_t)_{t \geq 0}$ converge presque sûrement vers une distribution stationnaire ν' où pour tout état transitoire i , $\nu'(i) = 0$.

1.1.2 Marches aléatoires

Les marches aléatoires sont des processus stochastiques représentant des déplacements aléatoires sur une ligne, une grille, etc. Nous nous restreignons ici aux marches aléatoires 1D (sur une ligne). Leur comportement a été intensivement analysé; il est maintenant connu en détails dans de nombreux cas. Ces processus apparaissent dans le comportement des automates cellulaires que nous allons étudier.

Définition 1.27 (Marche Aléatoire) Une marche aléatoire de paramètre $p \in [0, 1]$ est un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ prenant ses valeurs dans \mathbb{Z} tel que $P(X_{t+1} = X_t + 1) = p$ et $P(X_{t+1} = X_t - 1) = 1 - p$. On dit que la marche aléatoire est biaisée quand $p \neq 0.5$.

1.1.3 Collectionneur de coupons

Considérons une urne contenant N balles. À chaque tentative, un joueur choisit une balle au hasard et la remet dans l'urne. Le joueur gagne au moment où il a tiré au moins une fois chaque boule. Combien de tentatives devra-t-il faire? Ce problème est connu sous le nom de collectionneur de coupons et se modélise de la façon suivante :

Définition 1.28 (Collectionneur de coupons) Considérons l'ensemble $\{1, \dots, N\}$, on définit une suite de variables aléatoires $(X_t)_{t \geq 0}$ i. i. d. telles que pour tout $t \geq 0$ et pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, $P(X_t = i) = \frac{1}{N}$. Soit T la variable aléatoire définie par

$$T = \min_{t \geq 0} \{t : \exists t_1, \dots, t_N \leq t \text{ tel que } X_{t_1} = 1, \dots, X_{t_N} = N\}.$$

L'étude de cette variable aléatoire est connue sous le nom du problème du collectionneur de coupons.

Proposition 1.29 Pour un collectionneur de coupons où il y a N coupons, $\mathbb{E}[T] = N \times H(N)$ où $H(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \sim \ln n$.

1.1.4 Moyenne du maximum de n variables aléatoires i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre p .

Considérons la suite de variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre p . Considérons la variable aléatoire T suivante

$$T = \max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}.$$

L'étude de T est un problème classique. Une récapitulation des résultats connus peut être trouvée dans les travaux d'Eisenberg [19]. Nous n'aurons besoin que du résultat basique suivant :

$$-\frac{1}{\ln(1-p)} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i} \leq E[T] < 1 - \frac{1}{\ln(1-p)} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i}.$$

Et donc :

Proposition 1.30 *La moyenne du maximum de n variables aléatoires i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre p est $\Theta(\frac{-\ln n}{\ln(1-p)})$.*

1.2 Automates cellulaires asynchrones

1.2.1 Définition

Définition 1.31 (Automate cellulaire) *Un automate cellulaire est un quadruplet constitué de :*

- un ensemble de cellules, représenté sous la forme d'un groupe $(\mathbb{T}, +)$.
- un ensemble d'états Q fini.
- un voisinage V qui est un sous-ensemble de \mathbb{T} .
- une fonction de transition $\delta : Q^V \rightarrow Q$.

Quand un chapitre est dédié à un automate spécifique, nous utiliserons, par abus de notation, δ pour désigner la règle de transition de l'automate considéré. Ainsi selon le chapitre, la fonction de transition désignée par δ n'est pas la même. Nous spécifions toujours en début de chapitre quelle règle est associée à δ .

Définition 1.32 (Configuration et voisinage) *Une configuration c est une fonction $c : \mathbb{T} \rightarrow Q$; soit $i \in \mathbb{T}$, c_i est l'état de la cellule i dans la configuration c et le voisinage de la cellule i est l'ensemble des cellules $\{k : \exists j \in V, i + j = k\}$.*

Définition 1.33 (Dynamique) *Une dynamique $(D^t)_{t \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables i.i.d. où pour chaque $t \geq 0$, $D^t \subset \mathbb{T}$. Au temps t , on dit que toute cellule appartenant à D^t se met à jour.*

Définition 1.34 (Trajectoire) *Etant donné un automate cellulaire asynchrone, une configuration c^0 appelée configuration initiale et une dynamique $(D^t)_{t \geq 0}$, une trajectoire est une suite de variables aléatoires $(c^t)_{t > 0}$ où pour tout $t \geq 1$, la variable aléatoire c^t désigne la configuration au temps t et elle est définie de la façon suivante :*

$$c_i^t = \begin{cases} \delta(c_i^{t-1}) & \text{si } i \in D^{t-1} \\ c_i^{t-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Par abus de langage, $\delta(c_i)$ désigne l'état renvoyé par la fonction de transition δ appliquée aux états des cellules du voisinage de la cellule i dans la configuration c . Pour $t > 0$, quand la dynamique D^t est explicite, $\delta(c^t)$ représente la variable aléatoire c^{t+1} .

Définition 1.35 (Transition active) *Une transition est un élément de Q^V et elle est active pour la fonction de transition δ si une cellule, dont les états de son voisinage correspondent à cette transition, change d'état quand elle est mise à jour.*

Définition 1.36 (Cellule active) Une cellule est active dans la configuration c si elle change d'état quand elle se met à jour. Si une cellule n'est pas active, elle est dite inactive.

Définition 1.37 (Configuration stable) Une configuration c est stable si pour tout $i \in \mathbb{T}$, $\delta(c_i) = c_i$ (i.e. toutes les cellules de la configuration sont inactives).

Considérons une trajectoire $(c^t)_{t \geq 0}$. Si c^t est une configuration stable, alors pour tout $t' \geq t$, on a $c^{t'} = c^t$ et cela quelle que soit la dynamique. Remarquons que la dynamique choisie n'influe pas sur le fait qu'une configuration soit stable ou non.

Définition 1.38 (Temps de relaxation) On dit qu'une trajectoire $(c^t)_{t \geq 0}$ converge presque sûrement à partir de la configuration initiale c^0 si la variable aléatoire $T_{c^0} = \min\{t : c^t \text{ est stable}\}$ est finie avec probabilité 1. La variable aléatoire T_{c^0} est appelée le temps de convergence¹ depuis c^0 . On appelle temps de relaxation la valeur $\max_{\text{configuration } \gamma} \mathbb{E}[T_\gamma]$. Abusivement, nous dirons que l'automate cellulaire diverge si son temps de relaxation est infini.

L'objet de cette thèse est d'évaluer le temps de relaxation pour différentes fonctions de transition sous les dynamiques asynchrones. Nous verrons que cette étude permet de décrire assez précisément le comportement des automates considérés.

1.2.2 Les automates cellulaires considérés dans cette thèse

Les automates cellulaires peuvent être extrêmement variés. Dans cette thèse, nous étudions l'influence des dynamiques asynchrones. Nous utilisons les ensembles de cellules, les ensembles d'états et les voisinages les plus usités. Ainsi, le comportement de ces automates cellulaires est généralement connu dans le cas de la dynamique synchrone, classiquement utilisée dans la littérature, et les changements de comportements constatés sont dus aux dynamiques asynchrones.

Ensemble d'états

Dorénavant nous considérons toujours que l'ensemble d'états Q est $\{0, 1\}$ (0 correspond à blanc et 1 à noir dans les figures).

Ensemble de cellules

Nous allons utiliser les différents ensembles de cellules suivants :

- *Ensemble infini de cellules* : nous considérons \mathbb{Z}^d la grille infinie de cellules de dimension d .
- *Ensemble torique fini de cellules 1D et 2D* : étant donné un entier positif n (resp. deux entiers positifs n et m), on note $\mathbb{T}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{T}_{n,m} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$) le tore fini de dimension 1 (resp. 2). En dimension 2, on désigne par $N = n \times m$ le nombre de cellules.

Par abus de langage, on parlera de configurations 1D finies quand l'ensemble des cellules est fini torique de dimension 1, de configurations 1D infinies quand l'ensemble des cellules est infini de dimension 1, de configurations 2D finies quand l'ensemble des cellules est fini torique de dimension 2 et de configurations 2D infinies quand l'ensemble des cellules est infini de dimension 2. Nous travaillons en dimension 1 dans la partie I et en dimension 2 dans la partie II.

¹Le temps de convergence est également appelé parfois *temps d'absorption*.

Voisinage

Les voisinages que nous utilisons sont les voisinages $1D$ et $2D$ des plus proches voisins les plus couramment utilisés :

- *Voisinage $1D$* : En dimension 1, on appelle *voisinage premier* le voisinage $\{-1, 0, 1\}$.
- *Voisinage de von Neumann ($2D$)* : En dimension 2, on appelle *voisinage de von Neumann* le voisinage des 4 plus proches voisins :

$$\{(0, -1), (-1, 0), (0, 0), (1, 0), (0, 1)\}.$$

- *Voisinage de Moore ($2D$)* : En dimension 2, on appelle *voisinage de Moore* le voisinage des 8 plus proches voisins :

$$\{(-1, -1), (0, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, 0), (1, -1), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}.$$

Dynamique

La dynamique synchrone est la dynamique sous laquelle évoluent classiquement les automates cellulaires, notre but est d'étudier les dynamiques asynchrones :

- *Dynamique synchrone* : La dynamique $(D^t)_{t \geq 0}$ où pour tout $t \geq 0$, $D^t = \mathbb{T}$ est la dynamique *synchrone* (cette dynamique est déterministe).
- *Dynamique totalement synchrone* : Quand l'ensemble de cellules est fini, on parle de dynamique *totalement asynchrone* $(D^t)_{t \geq 0}$ quand $\forall t \geq 0$, D^t contient une seule cellule choisie aléatoirement de manière uniforme parmi \mathbb{T} .
- *Dynamique α -asynchrone* : Une dynamique $(D^t)_{t \geq 0}$ est α -*asynchrone* quand $\forall t \geq 0$, chaque cellule indépendamment les unes des autres a une probabilité α d'appartenir à D^t . La valeur α est appelée le *taux d'asynchronisme*.

La dynamique α -asynchrone est équivalente à la dynamique synchrone quand $\alpha = 1$. Abusivement, nous désignerons par $\alpha = 0$ la dynamique totalement asynchrone. Lorsque nous parlons de dynamiques asynchrones, nous désignons les deux dynamiques totalement asynchrone et α -asynchrone.

Définition 1.39 Soit δ une règle de transition, T_n (resp. $T_{n,\alpha}$) est le temps de relaxation de δ sur une configuration de taille n en dynamique totalement asynchrone (resp. α -asynchrone).

Temps de relaxation d'une règle de transition

Le temps de relaxation d'un automate cellulaire dépend bien entendu de la règle de transition de l'automate mais également de la taille de la configuration (et du taux de synchronisme α dans le cas de la dynamique α -asynchrone). Pour une règle de transition donnée, nous cherchons à encadrer le temps de relaxation de cette règle sur différentes topologies de la manière suivante :

Notation 1.40 Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$. Le temps de relaxation T d'une règle de transition δ en dynamique totalement asynchrone est :

- $T = O(f)$ s'il existe des constantes $k > 0$ et N telles que pour tout $n \geq N$, $T_n \leq kf(n)$.
- $T = \Omega(f)$ s'il existe des constantes $k > 0$ et N telles que pour tout $n \geq N$, $T_n \geq kf(n)$.
- $T = \Theta(f)$ si $T = O(f)$ et $T = \Omega(f)$.

Notation 1.41 Soit $f : \mathbb{N} \times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^+$. Le temps de relaxation T d'une règle de transition δ en dynamique α -asynchrone, est :

- $T = O(f)$ s'il existe des constantes $k > 0$ et N telles que pour tout $n \geq N$ et $\alpha \in]0, 1[$, $T_{n,\alpha} \leq kf(n, \alpha)$.

- $T = O(f)$ s'il existe des constantes $k > 0$ et N telles que pour tout $n \geq N$ et $\alpha \in]0, 1[$, $T_{n,\alpha} \geq kf(n, \alpha)$.
- $T = \Theta(f)$ si $T = O(f)$ et $T = \Omega(f)$.

1.3 Les automates cellulaires sont des chaînes de Markov

Nous considérons dans cette partie les automates cellulaires dont l'ensemble des cellules est fini. Étudier la trajectoire d'un tel automate cellulaire revient à considérer une chaîne de Markov où l'ensemble des états de la chaîne de Markov correspond à l'ensemble des configurations possibles de l'automate cellulaire (ensemble fini de taille $Q^{|\mathbb{T}|}$). Considérons deux états i et j de la chaîne de Markov, la probabilité p_{ij} est égale à la probabilité de passer de la configuration correspondant au macroétat i à la configuration correspondant au macroétat j en un pas de calcul sous la dynamique considérée de l'automate cellulaire.

Chaque configuration stable de l'automate cellulaire est un attracteur de la chaîne de Markov. Le fait qu'une configuration soit stable ne dépend pas de la dynamique. Par contre, l'existence d'autres attracteurs constitués de plusieurs configurations peut dépendre de la dynamique. Si pour une dynamique donnée, tous les attracteurs sont constitués d'une unique configuration stable, alors par le lemme 1.26, la dynamique converge presque sûrement à partir de n'importe quelle configuration initiale. Nous verrons que nous nous trouvons souvent dans ce cas. Ainsi,

Fait 1.42 (Convergence presque sûre des automates cellulaires de taille finie)

Un automate cellulaire probabiliste fini dont les attracteurs sont réduits à des singletons converge presque sûrement à partir de n'importe quelle configuration initiale vers une de ses configurations stables.

Étudier le comportement des automates cellulaires en tant que chaîne de Markov n'est pas aisé du fait de la taille de l'ensemble des états de la chaîne de Markov. C'est pourquoi nous utilisons une autre approche.

1.4 Fonctions potentielles

Un moyen pour étudier un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ prenant ses valeurs dans l'ensemble E est de lui associer une fonction potentielle.

Définition 1.43 (Fonction potentielle) *Considérons un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ prenant ses valeurs dans E . Une fonction potentielle F est une fonction $F : E \rightarrow \mathbb{R}$.*

Notation 1.44 (Variation d'une fonction potentielle) *Considérons un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ et une fonction potentielle F . La variation de F au temps t est la variable aléatoire :*

$$\Delta(F(X_t)) = F(X_{t+1}) - F(X_t).$$

Cette fonction est habituellement définie de telle façon qu'à chaque pas de temps t , l'espérance de sa variation $\mathbb{E}[\Delta F(X_t)]$ est soit toujours négative, soit toujours positive, soit toujours nulle. Les théorèmes suivants permettent d'extraire des informations sur le processus quand une telle fonction existe.

Proposition 1.45 (Fonction potentielle strictement décroissante en moyenne [27])

Considérons un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$, un entier $m > 0$ et une fonction potentielle $F : E \rightarrow [0, m]$. Supposons que si $F(X_t) > 0$, alors $\mathbb{E}[\Delta F(X_t) | X_t] \leq -\epsilon$ pour une certaine constante $\epsilon > 0^2$. Soit $T = \min\{t : F(X_t) \leq 0\}$ la variable aléatoire qui correspond au premier

²Dans ce cas on parle aussi de *fonction de Lyapunov*.

temps t où $F(X_t) \leq 0$. Alors en posant $f_0 = \mathbb{E}[F(X_0)]$, on a

$$\mathbb{E}[T] \leq \frac{f_0}{\epsilon}.$$

Proposition 1.46 (Fonction potentielle décroissante en moyenne [27]) *Considérons un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ un entier $m > 0$ et une fonction potentielle $F : E \rightarrow [0, m]$. Supposons que si $m > F(X_t) > 0$, alors $\mathbb{E}[\Delta F(X_t)|X_t] \leq 0$ et $P(|\Delta F(X_t)| \geq 1|X_t) \geq \epsilon$ pour une certaine constante $\epsilon > 0$ et si $F(X_t) = m$, alors $\mathbb{E}[\Delta F(X_t)|X_t] \leq -\epsilon$. Soit $T = \min\{t : F(X_t) \leq 0\}$ la variable aléatoire qui correspond au premier temps t où $F(X_t) \leq 0$. Alors en posant $f_0 = \mathbb{E}[F(X_0)]$,*

$$\mathbb{E}[T] \leq \frac{f_0(2m + 1 - f_0)}{2\epsilon}.$$

Si notre processus correspond à un automate cellulaire, la fonction potentielle associe un poids à chaque configuration. Nous choisissons nos fonctions potentielles de telle sorte qu'elles associent un poids négatif ou nul seulement aux configurations stables. La variable $T = \min\{t : F(X_t) \leq 0\}$ est alors un majorant du temps de relaxation de notre automate cellulaire asynchrone.

Notons qu'il existe des théorèmes équivalents dans le cas où la fonction potentielle est croissante en moyenne, strictement ou pas.

Proposition 1.47 (Fonction potentielle strictement croissante en moyenne [27])

Considérons un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$, un entier $m > 0$ et une fonction potentielle $F : E \rightarrow [0, m]$. Supposons que si $F(X_t) < m$, alors $\mathbb{E}[\Delta F(X_t)|X_t] \geq \epsilon$ pour une certaine constante $\epsilon > 0$. Soit $T = \min\{t : F(X_t) \geq m\}$ la variable aléatoire qui correspond au premier temps t où $F(X_t) \geq m$. Alors en posant $f_0 = \mathbb{E}[F(X_0)]$, on a

$$\mathbb{E}[T] \leq \frac{m - f_0}{\epsilon}.$$

Proposition 1.48 (Fonction potentielle croissante en moyenne [27]) *Considérons un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ un entier $m > 0$ et une fonction potentielle $F : E \rightarrow [0, m]$. Supposons que si $0 < F(X_t) < m$, alors $\mathbb{E}[\Delta F(X_t)|X_t] \geq 0$ et $P(|\Delta F(X_t)| \geq 1|X_t) \geq \epsilon$ pour une certaine constante $\epsilon > 0$ et si $F(X_t) = 0$, alors $\mathbb{E}[\Delta F(X_t)|X_t] \leq -\epsilon$. Soit $T = \min\{t : F(X_t) \geq m\}$ la variable aléatoire qui correspond au premier temps t où $F(X_t) \geq m$. Alors en posant $f_0 = \mathbb{E}[F(X_0)]$,*

$$\mathbb{E}[T] \leq \frac{(m - f_0)(m + 1 + f_0)}{2\epsilon}.$$

1.5 Couplage

Un *couplage* est une méthode probabiliste permettant d'étudier un processus stochastique à partir d'un autre processus stochastique dont on connaît déjà le comportement. Concrètement il s'agit de deux processus stochastiques opérant sur le même espace de probabilité.

Vecteur de variables aléatoires. Considérons plusieurs variables aléatoires X_1, \dots, X_n où une variable aléatoire X_i prend ses valeurs dans un ensemble E_i . $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un *vecteur aléatoire*. Si $n = 2$, on parle de *couple aléatoire*. Un vecteur aléatoire est également une

variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $E = E_1 \times \dots \times E_n$. La loi de la variable X est donnée par :

$$p_X(x) = P(X = x) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n).$$

La loi de la variable X est appelée *loi jointe* tandis que les lois des variables X_i sont appelées *lois marginales*.

Couplage. Dans le cas d'un couplage, nous allons étudier un processus aléatoire fait de couples aléatoires.

Définition 1.49 (Couplage) *Considérons deux processus aléatoires $(X_t)_{t \geq 0}$ sur Ω et $(Y_t)_{t \geq 0}$ sur Ω' . Un couplage de ces deux processus aléatoires est un processus aléatoire $Z_t = (X'_t, Y'_t)_{t \geq 0}$ sur $(\Omega \times \Omega')$ où pour tout t , la loi marginale X'_t et la loi de X_t sont identiques et la loi marginale Y'_t et la loi de Y_t sont identiques.*

Même si pour tout $t \geq 0$, les lois marginales sont fixées par $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$, il existe plusieurs façons de définir la loi jointe.

Un premier exemple. Considérons $p \in [0, 1]$ et le processus stochastique $Z_t = (X_t, Y_t)_{t \geq 0}$ prenant ses valeurs dans \mathbb{Z}^2 , tel que :

- $P(X^{t+1} = X_t + 1) = p$ et cela indépendamment des variables aléatoires $(Y_t)_{t \geq 0}$.
- $P(X^{t+1} = X_t - 1) = 1 - p$ et cela indépendamment des variables aléatoires $(Y_t)_{t \geq 0}$.
- $P(Y^{t+1} = Y_t + 1) = p$ et cela indépendamment des variables aléatoires $(X_t)_{t \geq 0}$.
- $P(Y^{t+1} = Y_t - 1) = 1 - p$ et cela indépendamment des variables aléatoires $(X_t)_{t \geq 0}$.

Les processus aléatoires $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ sont deux marches aléatoires de paramètre p . Dans ce couplage, la valeur $|X_t - Y_t|$ peut devenir arbitrairement grande.

Maintenant, considérons le processus stochastique $Z'_t = (X'_t, Y'_t)_{t \geq 0}$ prenant ses valeurs dans \mathbb{Z}^2 , tel que :

- $X'_0 = Y'_0 = 0$.
- Avec probabilité p , $X'_{t+1} = X'_t + 1$ et $Y'_{t+1} = Y'_t + 1$.
- Avec probabilité $1 - p$, $X'_{t+1} = X'_t - 1$ et $Y'_{t+1} = Y'_t - 1$.

Les processus aléatoires $(X'_t)_{t \geq 0}$ et $(Y'_t)_{t \geq 0}$ sont, pris séparément, deux marches aléatoires de paramètre p . Mais dans ce cas, la valeur $|X'_t - Y'_t|$ est toujours nulle.

Un deuxième exemple. Le but d'un couplage est d'étudier les propriétés d'un processus stochastique à partir des propriétés d'un autre processus stochastique.

Considérons p et $p' \in [0, 1]$ tel que $p \geq p'$ et le processus stochastique $Z_t = (X_t, Y_t)_{t \geq 0}$ prenant ses valeurs dans \mathbb{Z}^2 , tel que :

- $X_0 = Y_0 = 0$.
- Avec probabilité p' , $X_{t+1} = X_t + 1$ et $Y_{t+1} = Y_t + 1$.
- Avec probabilité $p - p'$, $X_{t+1} = X_t + 1$ et $Y_{t+1} = Y_t - 1$.
- Avec probabilité $1 - p'$, $X_{t+1} = X_t - 1$ et $Y_{t+1} = Y_t - 1$.

Le processus aléatoire $(X'_t)_{t \geq 0}$ est une marche aléatoire de paramètre p et le processus aléatoire $(Y'_t)_{t \geq 0}$ est une marche aléatoire de paramètre p' . Dans ce cas, la valeur $X'_t - Y'_t$ est toujours positive. Ainsi, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{Z}$, nous obtenons le résultat $P\{X'_t \geq x\} \geq P\{Y'_t \geq x\}$. Connaître $P\{Y'_t \geq x\}$ donne des informations sur $P\{X'_t \geq x\}$.

Par la suite, nous allons coupler les trajectoires $(c^t)_{t \geq 0}$ de nos automates avec des marches aléatoires $(Y_t)_{t \geq 0}$ (données par la fonction potentielle, $Y_t = F(c^t)$), telles que si la marche aléatoire descend sous zéro, la configuration c^t est stable.

Première partie

Étude des dynamiques asynchrones
en dimension 1

Chapitre 2

Présentation de la problématique

Dans ce chapitre, nous proposons une analyse du temps de relaxation des automates cellulaires doublement quiescents en dynamique α -asynchrone. Le cas de la dynamique totalement asynchrone a déjà été traité par Fatès et al [27]. Dans cette étude, ils ont isolé les différents phénomènes intervenant dans l'évolution de ces automates. Ensuite, ils ont exhibé des motifs qui traduisent, sur les configurations, la façon dont agissent ces mécanismes. Puis, ils ont associé un poids aux configurations en fonction de l'importance de ces motifs pour obtenir une fonction potentielle sur les configurations. Si les poids sont définis correctement, alors la fonction potentielle permet de conclure grâce à l'un des théorèmes 1.45 ou 1.46. Les phénomènes qu'ils ont rencontrés sont des marches aléatoires et des collectionneurs de coupons. Dans notre étude de la dynamique α -asynchrone, nous devons faire face à des transitions de phase, à la multiplication des régions, à des collisions entre les régions, etc. La présence de ces nouveaux phénomènes nous oblige à exhiber des motifs plus grands et donc à gérer plus de cas. Nous avons raffiné leur méthode et développé un formalisme (bases de masques) qui n'attribue plus les poids aux configurations mais les attribue directement aux cellules en fonction de leur voisinage. Ceci permet d'être plus précis dans la définition des poids et permet une meilleure lisibilité des preuves. De plus, notre formalisme assure que nos énumérations de cas sont exhaustives. Ainsi, nous avons réussi à caractériser le comportement de 52 des 64 automates cellulaires considérés. Les automates restants sont les plus complexes, mais nous avons des résultats partiels pour deux d'entre eux. Pour le premier, la difficulté réside dans le grand nombre de phénomènes régissant l'évolution de l'automate ; nous ne savons pas encore tous les gérer. Mais nous avons exhibé une plage de valeur de α où certains d'entre eux deviennent négligeables et nos outils nous ont permis de gérer ceux qui restaient. Dans le deuxième cas, l'analyse d'une transition de phase, nous avons utilisé une approche différente en établissant un lien avec la percolation dirigée grâce à un couplage. Ceci nous a permis d'obtenir une borne supérieure sur la valeur critique de la transition de phase.

Nous commençons par donner les définitions nécessaires dans la section 2.1, puis nous présentons informellement le comportement de ces automates cellulaires en dynamique asynchrone dans la section 2.2. Ensuite nous présentons brièvement les résultats de l'analyse de la dynamique totalement asynchrone faite par Fatès *et al* [27] dans la section 2.3. Puis nous consacrons le chapitre 3 à la présentation de nos outils que nous mettons en oeuvre pour analyser la dynamique α -asynchrone de 52 automates [28]. Enfin nous consacrons le chapitre 4 à l'automate cellulaire élémentaire **BCF**(214) [79], un automate où un grand nombre de phénomènes interagissent, et le chapitre 5 à l'automate cellulaire élémentaire **BCDEFG**(178) [78], un automate qui présente une transition de phase.

2.1 Les automates cellulaires élémentaires doublement quiescents

Définition 2.1 (Automate cellulaire élémentaire (ACE)) *Un automate cellulaire est dit élémentaire si :*

- son ensemble de cellules est soit un tore fini de dimension 1, soit une ligne infinie de cellules.
- son ensemble d'états est $\{0, 1\}$.
- son voisinage est le voisinage premier.

À part dans le chapitre 5, nous travaillons toujours sur le tore fini. La fonction de transition d'un ACE est donc une fonction $\delta : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$. Il existe donc $2^8 = 256$ ACE différents.

Nous utilisons ici une numérotation des ACE issue des travaux de Fatès *et al* [24]. Cette notation simplifie la lecture des règles de l'automate pour les analyses en régime asynchrone.

Notation 2.2 (Notation des ACE) *Chaque ACE est entièrement déterminé par la liste de ses transitions actives. Nous indexons chaque transition active par une lettre comme suit :*

label	A	B	C	D	E	F	G	H
$x y z$	000	001	100	101	010	011	110	111
$\delta(x, y, z)$	1	1	1	1	0	0	0	0

nous indexons chaque ACE par l'ensemble de ses transitions actives. Quand nous disons qu'une cellule se trouve dans le voisinage A ou B ou ... ou H cela veut dire que le motif correspondant à son voisinage est celui de la transition nommée.

La communauté des automates cellulaires utilise une numérotation des ACE introduite par Wolfram [88]. La notation précédente est plus explicite dans notre cas. Nous préciserons toujours les deux notations.

Notation 2.3 (Numérotation des ACE : Wolfram) *La règle de transition δ d'un ACE associe à chaque transition l'état 0 ou l'état 1. En classant les 8 transitions par ordre lexicographique, on obtient un nombre de 8 bits où le bit de poids le plus faible représente le résultat par δ de la transition 000 et le bit de poids le plus fort le résultat par δ de la transition 111. En convertissant ce nombre binaire en décimal, on obtient le numéro de l'automate compris entre 0 et 255.*

Nous allons étudier le temps pour atteindre une configuration stable. Malheureusement, certains ACE n'admettent aucune configuration stable. Pour éviter ce problème, nous commençons par étudier la classe des automates cellulaires élémentaires doublement quiescents qui admettent toujours deux configurations stables : la configuration tout-blanc et la configuration tout-noir. Ces automates présentent déjà une grande richesse de comportement.

Définition 2.4 (Automate cellulaire élémentaire doublement quiescent (ACEDQ)) *Un état q est quiescent pour un automate cellulaire élémentaire si $\delta(q, q, q) = q$. Un ACE est doublement quiescent si et seulement si l'état 0 et l'état 1 sont quiescents (i.e. les transitions A et H sont inactives).*

Il existe 64 ACEDQ. Notons que certains de ces automates sont équivalents par symétrie noir/blanc des états, symétrie gauche/droite des configurations. Ainsi, il n'existe que 88 règles réellement différentes parmi les ACE [88] et 24 parmi les ACEDQ [27]. Nous n'étudions qu'un représentant de chacune des 24 classes d'ACEDQ. La liste de ces 24 ACEDQ est donnée dans la figure 2.1.

Définition 2.5 (Régions et frontières) Une 1-région (resp. 0-région) est un ensemble connexe maximal de cellules toutes dans l'état 1 (resp. 0). Si la configuration n'est pas la configuration stable tout-noir (resp. tout-blanc), la frontière gauche d'une 1-région (resp. 0-région) est entre les deux cellules voisines correspondant au motif 01 (resp. 10) tel que la cellule dans l'état 1 (resp. 0) soit dans la 1-région (resp. 0-région). La frontière droite d'une 1-région (resp. 0-région) est entre les deux cellules voisines correspondant au motif 10 (resp. 01) tel que la cellule dans l'état 1 (resp. 0) soit dans la 1-région (resp. 0-région)

Par définition des ACEDQ, toutes les cellules actives se trouvent sur les frontières entre les régions. Les cellules à l'intérieur des régions sont inactives.

2.2 Présentation du comportement des ACEDQ sous une dynamique asynchrone

La figure 2.1 présente les diagrammes espace-temps des 24 ACEDQ représentant chacun une des classes. La configuration initiale de longueur $n = 100$ est choisie aléatoirement. Nous faisons varier α de 0 (dynamique totalement asynchrone) à 1 (dynamique synchrone) par pallier de 0.25. La dernière colonne représente l'évolution de la densité des cellules noires au cours du temps sous la dynamique totalement asynchrone (un point est tracé tous les 100000 pas de temps). Cette classe présente une grande variété de comportements.

- Treize classes (ACE de **-(204)** à **EFG(128)**, **BF(198)** et **BG(142)** sur la figure 2.1 page 40) ne semblent pas subir de changements importants entre leur fonctionnement sous la dynamique synchrone et leur fonctionnement sous les dynamiques asynchrones.
- Six autres (ACE de **BCDEF(242)** à **BDEG(170)**, **BEF(194)** et **BEG(138)** sur la figure 2.1 page 40) présentent un changement brutal de comportement au passage de la dynamique synchrone à la dynamique α -asynchrone : ils convergent en temps polynomial vers l'une des configurations stables (tout-blanc ou tout-noir) sous une dynamique asynchrone (même lorsque le taux d'asynchrone est proche de 1), tandis qu'ils divergent sous la dynamique synchrone. Leurs diagrammes espace-temps exhibent des comportements de marches aléatoires. Néanmoins, l'ACE **BCF(194)** présente une particularité : le temps de relaxation est plus rapide en dynamique α -asynchrone qu'en dynamique synchrone. Les comportements les plus intéressants sont parmi les cinq ACE restants.
- Les ACE **BCEF(210)** et **BCF(214)** divergent sous la dynamique synchrone, semblent converger vers la configuration stable tout-noir en temps polynomial sous la dynamique α -asynchrone et, sous la dynamique totalement asynchrone, l'ACE **BCEF(210)** converge vers la configuration stable tout-blanc en temps exponentiel tandis que l'ACE **BCF(214)** diverge. Ces deux ACE présentent donc un comportement particulier qui ne peut se produire que sous la dynamique α -asynchrone.
- Les diagrammes espace-temps des ACE **BCDEFG(178)** et **BCEFG(146)** évoluent constamment quand α croît, ils présentent une transition de phase pour une valeur α_c , respectivement α'_c , telle que si $0 \leq \alpha < \alpha_c$ (respectivement $0 \leq \alpha < \alpha'_c$), ils convergent en temps polynomial et si $1 > \alpha > \alpha_c$ (respectivement $1 > \alpha > \alpha'_c$), ils convergent en temps exponentiel et divergent sous la dynamique synchrone.
- Finalement, l'ACE **BCFG(150)** semble converger en temps exponentiel quand $0 < \alpha < 1$ et diverger dans les autres cas. Mais, il ne semble pas présenter de structure, les configurations semblent tirées aléatoirement.

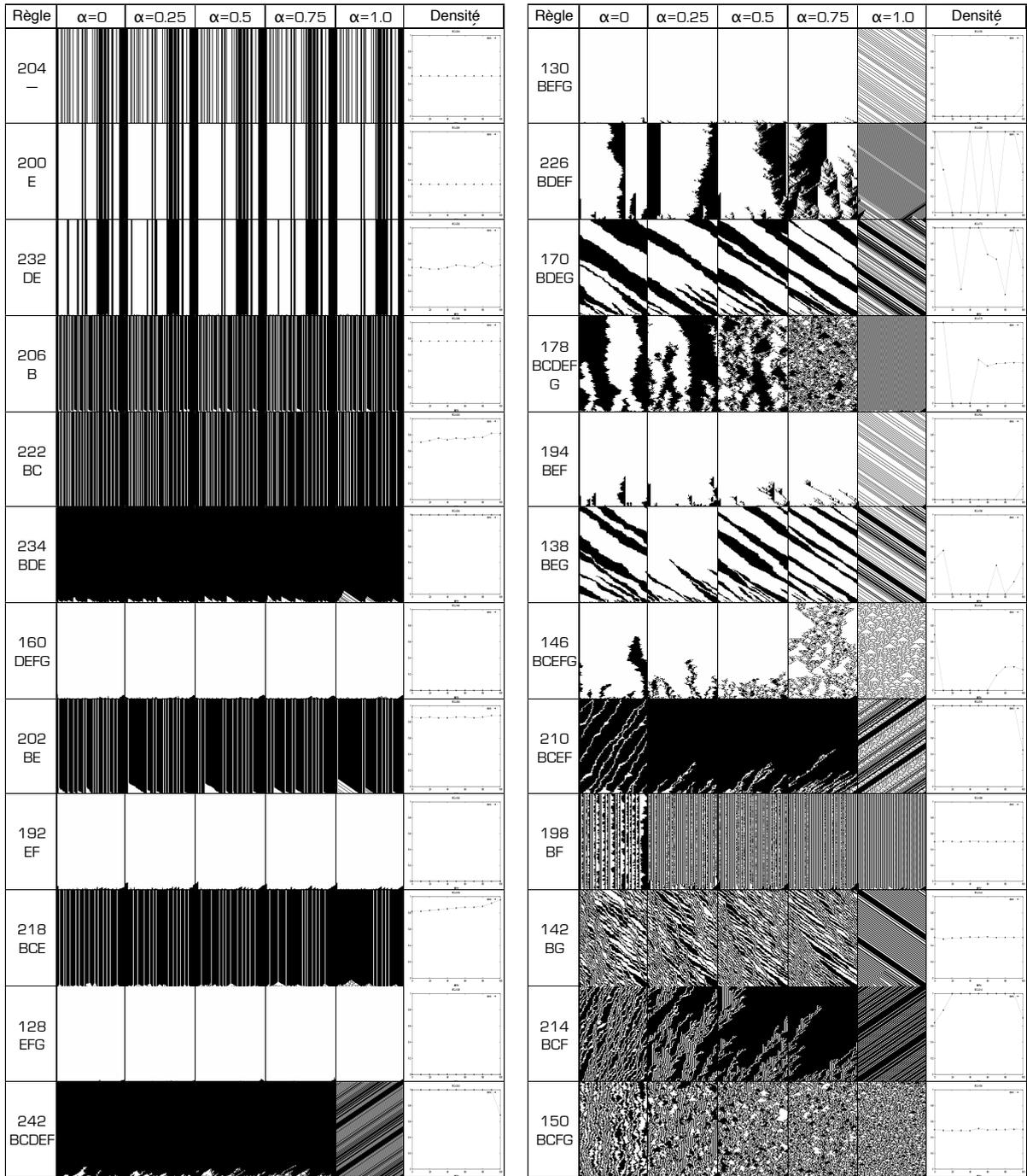
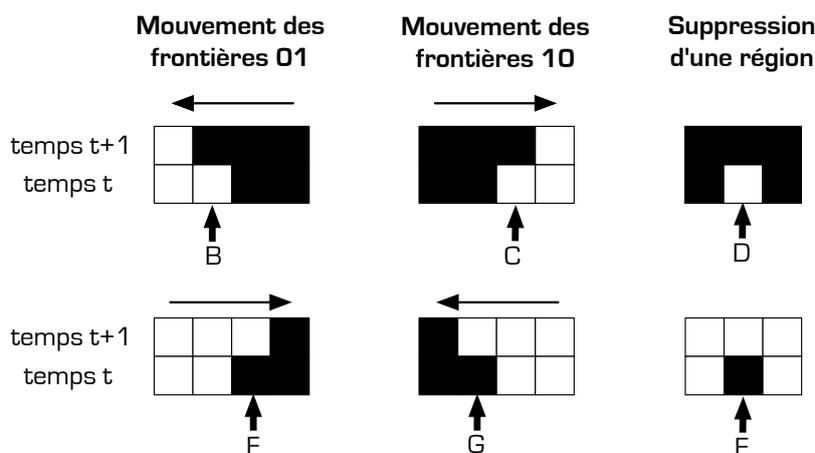


FIG. 2.1 – Présentation du comportement des 24 types de ACEDQ sous les dynamiques totalement asynchrone et α -asynchrone (nous avons utilisé le simulateur Fiatlux [23]).

2.3 Analyse de la dynamique totalement asynchrone : résultats antérieurs

Les travaux de Fatés *et al* [27] ont permis d'analyser le temps de relaxation des 24 ACEDQ et de classifier leur comportement sous la dynamique totalement asynchrone. Ces résultats sont rassemblés dans les premières colonnes du tableau 3.1 page 44 (ce tableau contient également nos résultats sur la dynamique α -asynchrone que nous présentons dans le reste de cette partie). Ils reposent sur l'étude de l'évolution des 0-régions et 1-régions dans les diagrammes espace-temps. Comme une seule cellule se met à jour à chaque pas de temps et que les transitions A et H sont toujours inactives, il existe 6 types de mises à jour différentes, une pour chaque transition B, C, D, E, F et G. Ces six types de mises à jour provoquent l'apparition de trois types de phénomènes qui modifient les régions :



Analyse en totalement asynchrone.

- Les transitions B et F agissent sur les frontières 01. La transition B déplace la frontière vers la gauche et la transition F la déplace vers la droite. Les frontières 01 se comportent comme des marches aléatoires biaisées quand une seule des deux transitions est active et comme des marches aléatoires non biaisées quand les deux transitions sont actives. si aucune de ces deux règles n'est active, alors ces frontières ne bougent pas. Les flèches du tableau 3.1 représentent les différents types de comportement des frontières 01 : \leftarrow (resp. \rightarrow) pour une marche aléatoire biaisée vers la gauche (resp. vers la droite) et \leftrightarrow pour un comportement de marche aléatoire non biaisée.
- Les transitions C et G agissent de façon similaire sur les frontières 10. La transition C déplace la frontière vers la droite et la transition G la déplace vers la gauche.
- Les transitions D et E entraînent une baisse du nombre de régions dans le diagramme espace-temps : D efface les 1 isolés et E les 0 isolés.

Sous la dynamique totalement asynchrone, le nombre de régions ne peut que décroître. Ce constat aide beaucoup à l'élaboration des preuves. Mais comme nous allons le voir, cette propriété n'est plus vraie dans le cas de la dynamique α -asynchrone.

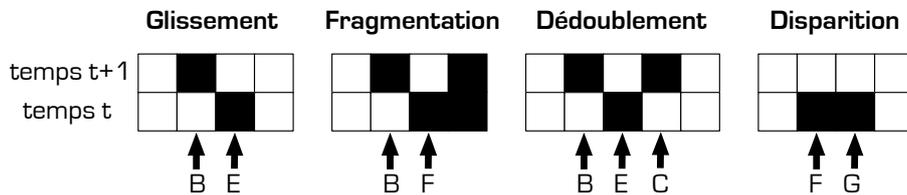
Chapitre 3

Analyse de la dynamique α -asynchrone

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats que nous avons obtenus en collaboration avec Fatès [28].

3.1 Observations clés et résultats sur la dynamique α -asynchrone

La différence entre la dynamique totalement asynchrone et la dynamique α -asynchrone vient du fait que plusieurs cellules voisines peuvent se mettre à jour en même temps. Ceci engendre de nouveaux phénomènes :



Analyse en α -asynchrone.

- **Glissement** : Ce phénomène apparaît à l’activation simultanée des transitions B et E, ou C et E, ou F et D, ou G et D : un 0 isolé ou un 1 isolé est déplacé. Ici, même si une règle D ou E est activée, aucune région ne disparaît. Ce phénomène rend plus difficile la disparition de régions.
- **Fragmentation** : Ce phénomène apparaît à l’activation simultanée des transitions B et F, ou C et G : un motif 0011 peut créer une nouvelle région. Ce phénomène est important car il provoque une hausse du nombre de régions et une fragmentation des régions de grande taille.
- **Dédoublément** : Ce phénomène apparaît à l’activation simultanée des transitions B, C et E, ou F, G et D : trois cellules voisines se mettent à jour et un point isolé est dédoublé. Ce phénomène accroît le nombre de régions et les rend plus difficiles à éliminer.
- **Disparition** : Ce phénomène apparaît à l’activation simultanée des transitions B et C, ou F et G et D : l’activation de ces deux transitions fait disparaître une région de taille 2. Ce phénomène permet d’éliminer des régions sans l’activation des transitions D ou E.

La conséquence la plus importante de ces phénomènes est le fait que le nombre de régions peut croître. Ceci modifie grandement la complexité de nos études. Nous développons un nouveau formalisme pour pallier ce problème que nous introduisons dans la section suivante. Voici

TAB. 3.1 – Analyse du comportement des 24 types d'ACEDQ en dynamique totalement asynchrone et α -asynchrone.

ECA (#)	Règle	01	10	010	101	Gli.	Fra.	Déd.	Dis.	Tot. Asyn.	α -Asynch.	Synch.
204 (1)	0	0	0
200 (2)	E	.	.	+	$\Theta(n \ln n)$	$\Theta\left(\frac{-\ln n}{\ln(1-\alpha)}\right)$	1
232 (1)	DE	.	.	+	+	$\Theta(n \ln n)$	$O\left(\frac{-\ln n}{\ln(1-\alpha(1-\alpha))}\right)$	∞
206 (4)	B	←	$\Theta(n^2)$	$\Theta\left(\frac{n}{\alpha}\right)$	$\Theta(n)$
222 (2)	BC	←	→	+	$\Theta(n^2)$	$\Theta\left(\frac{n}{\alpha}\right)$	$\Theta(n)$
192 (4)	EF	→	.	+	$\Theta(n^2)$	$\Theta\left(\frac{n}{\alpha}\right)$	$\Theta(n)$
128 (2)	EFG	→	←	+	+	$\Theta(n^2)$	$\Theta\left(\frac{n}{\alpha}\right)$	$\Theta(n)$
234 (4)	BDE	←	.	+	+	+	.	.	.	$\Theta(n^2)$	$\Theta\left(\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\right)$	∞
202 (4)	BE	←	.	+	.	+	.	.	.	$\Theta(n^2)$	$\Theta\left(\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\right)$	∞
250 (2)	BCDE	←	→	+	+	+	.	+	+	$\Theta(n^2)$	$O\left(\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\right), \Omega\left(\frac{n}{\alpha}\right)$	∞
218 (2)	BCE	←	→	+	.	+	.	+	+	$\Theta(n^2)$	$O\left(\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\right), \Omega\left(\frac{n}{\alpha}\right)$	∞
242 (4)	BCDEF	↔↔↔	→	+	+	+	+	+	+	$\Theta(n^2)$	$O\left(\frac{n}{\alpha(1-\alpha)}\right), \Omega\left(\frac{n}{\alpha}\right)$	∞
130 (4)	BEFG	↔↔↔	←	+	.	+	+	.	+	$\Theta(n^2)$	$O\left(\frac{n}{\alpha(1-\alpha)}\right), \Omega\left(\frac{n}{\alpha}\right)$	∞
170 (2)	BDEG	←	←	+	+	+	.	.	.	$\Theta(n^3)$	$O\left(\frac{n^2}{\alpha(1-\alpha)}\right), \Omega\left(\frac{n}{\alpha}\right)$	∞
138 (4)	BEG	←	←	+	.	+	.	.	.	$\Theta(n^3)$	$O\left(\frac{n^2}{\alpha(1-\alpha)}\right), \Omega\left(\frac{n}{\alpha}\right)$	∞
226 (2)	BDEF	↔↔↔	.	+	+	+	+	.	.	$\Theta(n^3)$	$O\left(\frac{n^2}{\alpha(1-\alpha)}\right), \Omega\left(\frac{n}{\alpha}\right)$	∞
194 (4)	BEF	↔↔↔	.	+	.	+	+	.	.	$\Theta(n^3)$	$O\left(\frac{n}{\alpha^2(1-\alpha)}\right), \Omega\left(\frac{n}{\alpha}\right)$	∞
178 (1)	BCDEFG	↔↔↔	↔↔↔	+	+	+	+	+	+	$\Theta(n^3)$	transition de phase? poly. pour $\alpha < \alpha_c$? exp. pour $\alpha > \alpha_c$?	∞
146 (2)	BCEFG	↔↔↔	↔↔↔	+	.	+	+	+	+	$\Theta(n^3)$	transition de phase? poly. pour $\alpha < \alpha'_c$? exp. pour $\alpha > \alpha'_c$?	∞
210 (4)	BCEF	↔↔↔	→	+	.	+	+	+	+	$\Theta(n2^n)$	polynomial?	∞
214 (4)	BCF	↔↔↔	→	.	.	.	+	.	+	∞	polynomial? vrai $\alpha > 0.9999$	∞
150 (1)	BCFG	↔↔↔	↔↔↔	.	.	.	+	.	+	∞	exponentiel?	∞
198 (2)	BF	↔↔↔	+	.	.	∞	∞	∞
142 (2)	BG	←	←	∞	∞	∞

le résultat principal que nous allons démontrer dans ce chapitre.

Théorème 3.1 (ACEDQ sous la dynamique α -asynchrone) *Sous la dynamique α -asynchrone, parmi le comportement des soixante-quatre ACEDQ, nous avons déterminé le comportement de cinquante-deux d'entre-eux :*

- Quarante-huit convergent presque sûrement vers une configuration stable depuis n'importe quelle configuration initiale, le temps de relaxation de ces quarante-huit ACEDQ est
 - $\Theta(\frac{-\ln n}{\ln(1-\alpha)})$,
 - $O(\frac{-\ln n}{\ln(1-\alpha(1-\alpha))})$ et $\Omega(\frac{-\ln n}{\ln(1-\alpha)})$,
 - $\Theta(\frac{n}{\alpha})$,
 - $\Theta(\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)})$,
 - $O(\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)})$, $O(\frac{n}{\alpha(1-\alpha)})$, $O(\frac{n}{\alpha^2(1-\alpha)})$, $O(\frac{n^2}{\alpha(1-\alpha)})$ et $\Omega(\frac{n}{\alpha})$.
- Deux divergent depuis n'importe quelle configuration initiale qui n'est ni 0^n , ni 1^n , ni $(01)^{n/2}$ quand n est pair.
- Deux convergent avec très faible probabilité quand n est pair depuis quelques rares configurations initiales et divergent autrement.

Les douze autres (cinq après symétries) ont des comportements que nous ne savons pas encore prouver. Certains semblent présenter des transitions de phase mais les analyser mathématiquement reste un problème difficile. Tous nos résultats et nos conjectures sont récapitulés dans le tableau 3.1.

3.2 Fonctions potentielles basées sur des voisinages locaux

Définition 3.2 (Masque) *Un masque \dot{m} est un mot sur $\{0, 1, \dot{0}, \dot{1}\}$ contenant exactement une lettre pointée $\{\dot{0}, \dot{1}\}$. La cellule i dans la configuration c correspond au masque $\dot{m} = m_{-k} \dots m_{-1} \dot{m}_0 m_1 \dots m_l$ si $c_{i-k} \dots c_i \dots c_{i+l} = m_{-k} \dots m_0 \dots m_l$. Nous désignons par m le mot $m_{-k} \dots m_0 \dots m_l$.*

Notation 3.3 *Dans les sections suivantes, certaines lettres des masques seront annotées par un symbole \times ou $?$. Une cellule qui n'est pas annotée est inactive. Une cellule annotée par un \times est active. Une cellule annotée par un $?$ indique que nous ne disposons pas d'assez d'informations pour conclure si la cellule est active ou pas.*

Par exemple, considérons le motif 011001011 : pour l'automate **FG**, ce motif devient $\underset{\times \times}{011001011}$ et pour l'automate **DE**, ce motif devient $\underset{?}{011001011}$.

Définition 3.4 (Occurrence) *Pour un mot $w \in Q^*$, $|c|_w = \#\{i \in \mathbb{T} : c_{i+1} \dots c_{i+|w|} = w\}$ dénombre le nombre d'occurrences du mot w dans la configuration c .*

Fait 3.5 *Le nombre de cellules correspondant à un masque \dot{m} dans la configuration c est exactement $|c|_{\dot{m}}$, le nombre d'occurrences du mot \dot{m} .*

Définition 3.6 (Base de masques) *Une base de masques \mathcal{B} est un ensemble fini de masques tel que pour toute configuration c et toute cellule i , il existe exactement un unique masque $\dot{m} \in \mathcal{B}$ qui correspond à la cellule i .*

Définition 3.7 (Arbre de masques) *Un arbre de masques est un arbre binaire étiqueté où les deux fils d'un noeud reçoivent l'étiquette de leur père à laquelle sont rajoutés, soit à gauche, soit à droite, 0 pour le premier fils et 1 pour le second (les fils de la racine reçoivent les étiquettes $\dot{0}$ et $\dot{1}$ respectivement).*

Lemme 3.8 Une base de masques \mathcal{B} peut être représentée par un arbre de masques. Les masques de \mathcal{B} sont les étiquettes des feuilles de l'arbre. Réciproquement, les feuilles d'un arbre de masques définissent une unique base de masques.

Preuve. Un arbre de masques représente une base de masques \mathcal{B} : Pour trouver à quel masque correspond une cellule, il suffit d'exécuter l'algorithme 1.

Algorithme 1 Chercher un masque dans une arbre de masques

Entrées: une configuration c , une cellule i et un arbre de masque.

```

1: Poser un jeton sur la racine,  $g = 1, d = 1$ ,
2: si  $c_i = 0$  alors
3:   déplacer le jeton sur le premier fils de la racine
4: sinon
5:   déplacer le jeton sur le deuxième fils
6: fin
7: tantque le jeton n'est pas sur une feuille faire
8:   si le jeton se trouve sur un noeud dont les fils ont un bit rajouté à gauche alors
9:     si  $c_{i-g} = 0$  alors
10:      alors  $g = g + 1$  et déplacer le jeton sur le premier fils du noeud considéré
11:     sinon
12:      alors  $g = g + 1$  et déplacer le jeton sur le second fils du noeud considéré
13:     fin
14:   sinon
15:     si  $c_{i+d} = 0$  alors
16:      alors  $d = d + 1$  et déplacer le jeton sur le premier fils du noeud considéré
17:     sinon
18:      alors  $d = d + 1$  et déplacer le jeton sur le second fils du noeud considéré
19:     fin
20:   fin
21: fin tantque
22: return le masque correspondant à la feuille sur laquelle se trouve le jeton

```

Par la construction de l'arbre, le voisinage de la cellule correspond à l'étiquette de la feuille atteinte. Supposons par contradiction qu'une cellule corresponde à l'étiquette de deux feuilles différentes. Considérons le plus petit ancêtre commun de ces deux feuilles : la première feuille appartient au premier sous-arbre de cet ancêtre commun et la deuxième feuille appartient au deuxième sous-arbre, donc l'état de la cellule indexée par ce noeud devrait être à la fois dans l'état 0 et 1. Contradiction.

Réciproquement, une base de masques \mathcal{B} est représentée par un arbre binaire : nous décomposons dans l'algorithme tous les masques en trois mots $w_1 w_2 w_3$. L'algorithme 2 construit l'arbre à partir de la base de masques. Au cours des fusions, l'ensemble des feuilles des différents arbres ne change pas donc si cet algorithme termine, il renvoie au final un arbre dont les feuilles sont les masques de \mathcal{B} .

Pour prouver que l'algorithme termine il suffit de prouver qu'à l'étape trois, il existe toujours deux mots de même longueur l qui diffèrent soit sur le premier bit de w_1 , soit sur le dernier bit de w_3 . Procédons par contradiction. Considérons un mot $w_1 w_2 w_3$ de longueur maximal l dans la base de masques. Supposons que $w_1 = 0w'_1$ et $w_3 = w'_3 0$ (les autres cas sont symétriques et si w_1 ou w_2 est le mot vide alors la contradiction arrive plus rapidement). Par hypothèse, la base de masques ne contient pas les mots $1w'_1 w_2 w_3$ et $w_1 w_2 w'_3 1$. Considérons une cellule correspondant

Algorithme 2 Construire un arbre de masques à partir d'une base de masque

Entrées: une base de masque \mathcal{B} .

- 1: Associer à chaque masque \dot{m} de la base un arbre fait d'une unique feuille étiquetée par le masque \dot{m}
 - 2: **tantque** $\mathcal{B} \neq \{\dot{0}, \dot{1}\}$ **faire**
 - 3: sélectionner deux mots $\dot{m}_1 = w_1\dot{w}_2w_3$ et $\dot{m}_2 = w'_1\dot{w}'_2w'_3$ de même longueur l tels que les deux mots sont identiques sauf sur un bit qui est soit le premier bit de w_1 et w'_1 , soit le dernier bit de w_3 et w'_3 , on suppose que ce bit est 0 dans \dot{m}_1 et 1 dans \dot{m}_2
 - 4: ôter ces deux mots de la base et rajouter le mot \dot{m}' de longueur $l - 1$ qui correspond à la partie commune de ces deux mots
 - 5: associer à ce nouveau mot l'arbre correspondant à la fusion des deux arbres des mots précédents (ajout d'une racine étiquetée par \dot{m}' et l'arbre de \dot{m}_1 devient le premier sous-arbre et l'arbre de \dot{m}_2 devient le deuxième sous-arbre)
 - 6: **fin tantque**
 - 7: **return** la fusion des deux arbres associés à 0 et 1.
-

au motif $1w'_1\dot{w}_2w_3$, comme \mathcal{B} est une base de masques, elle contient un masque $1w'_1\dot{w}_2x$ où il existe un mot z non vide tel que $w_3 = xz$ (l est maximal et que $1w'_1\dot{w}_2w_3$ n'est pas dans la base). De même, la base contient un mot $y\dot{w}_2w'_30$ où il existe z' non vide tel que $w_1 = z'y$. Donc la cellule dans le motif $y\dot{w}_2x$ correspond aux deux masques $1w'_1\dot{w}_2x$ et $y\dot{w}_2w'_30$ de \mathcal{B} . Contradiction. \square

La figure 3.7b représente l'arbre correspondant à la base de masques $\mathcal{B} = \{1\dot{1}, 00\dot{1}0, 00\dot{1}1, 010\dot{1}, 110\dot{1}, \dot{0}0, 0\dot{0}10, 0\dot{0}11, 01\dot{0}1, 11\dot{0}1\}$. Les bases de masques servent à définir des fonctions potentielles à partir de poids sur des motifs locaux. Ce sont des outils utiles pour démontrer que nos analyses de cas sont exhaustives.

Définition 3.9 (Fonction de poids locaux) *Considérons une base de masques \mathcal{B} , une fonction de poids locaux f est une fonction $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z}$. Le poids local d'une cellule i dans une configuration c par la fonction f est $F(c, i) = f(\dot{m})$ où \dot{m} est l'unique masque de \mathcal{B} correspondant à la cellule i . La fonction potentielle $F(c) = \sum_i F(c, i)$ associe à chaque configuration un poids.*

Fait 3.10 *Étant donnée une fonction de poids locaux $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z}$, le poids de la configuration c est*

$$F(c) = \sum_{\dot{m} \in \mathcal{B}} f(\dot{m}) \cdot |c|_{\dot{m}}.$$

Notation 3.11 *Considérons une trajectoire $(c^t)_{t \in \mathbb{N}}$ et une fonction potentielle F sur les configurations, $(\Delta F(c^t))_{t \in \mathbb{N}}$ désigne la séquence aléatoire $\Delta F(c^t) = F(c^{t+1}) - F(c^t)$.*

Nous allons être amené à analyser très souvent cette variation de potentiel en fonction de la configuration c^t . Pour alléger les notations dans les études de cas, on utilisera la notation $E[\Delta F(c^t)]$ pour désigner en fait $E[\Delta F(c^t)|c^t]$.

3.3 Note sur l'analyse des temps de relaxation

Dans cette section, nous expliquons comment sont structurées les analyses des temps de relaxation des différents automates dans la section suivante.

Nom de l'automate. Nous commençons par donner le nom de l'automate en utilisant la notation 2.2 page 38 (et la notation 2.3 entre parenthèses). La figure 2.1 page 40 permet d'observer des diagrammes espace-temps de cet automate pour différentes valeurs de α .

Configurations stables. Ensuite, nous donnons l'ensemble des configurations stables de l'automate. Celles-ci sont déterminées par le fait suivant, tiré des travaux de Fatès *et al* [27] sur la dynamique totalement asynchrone :

Fait 3.12 (Configurations stables d'un ACEDQ) *Si un ACEDQ δ admet une configuration stable non-triviale c , alors :*

- *si la transition B ou C est active pour δ , alors tous les 0 sont isolés dans c ,*
- *si la transition F ou G est active pour δ , alors tous les 1 sont isolés dans c ,*
- *si la transition D est active pour δ , aucun 0 n'est isolé dans c ,*
- *si la transition E est active pour δ , aucun 1 n'est isolé dans c ,*

Comportement de l'automate. Nous poursuivons par un paragraphe qui décrit informellement le comportement de cet automate. Le but est de familiariser le lecteur avec le comportement de l'automate et d'expliquer les réflexions qui nous ont permis de trouver la fonction potentielle. En effet, la fonction potentielle est une traduction en langage mathématique de ces observations.

La fonction de poids locaux. Nous définissons ensuite la fonction potentielle à partir d'une fonction de poids locaux comme expliqué dans la définition 3.9. La base de masques \mathcal{B}_1 , utilisée dans la définition de la fonction potentielle, est présentée sous la forme d'un arbre de masques, certifiant ainsi que la base est correcte. Pour des considérations graphiques les points sur les masques sont remplacés par des soulignés, les poids associés aux masques sont marqués à côté des feuilles et récapitulés dans un tableau.

Analyse de la variation de la fonction potentielle. Grâce à la linéarité de l'espérance, évaluer l'espérance de la variation de la fonction potentielle est équivalent à sommer les espérances de la variation de poids local de toutes les cellules. Ainsi, nous allons évaluer l'espérance de la variation de poids local de chaque cellule, mais les masques de la base \mathcal{B}_1 ne sont généralement pas assez précis pour l'évaluer correctement car le masque auquel correspond la cellule après un pas de temps peut être beaucoup plus grand que le précédent.

Base de masques d'analyse. Nous allons donc introduire une deuxième base de masques \mathcal{B}_2 (toujours sous la forme d'un arbre de masques) servant à l'analyse de l'espérance de la variation de poids local d'une cellule. L'arbre de masques de \mathcal{B}_1 est généralement un sous-arbre de ce nouvel arbre de masques mais nous avons besoin de plus d'informations sur le voisinage des cellules. Pour chaque masque m de cette base, nous évaluons une majoration b_m (minoration selon la borne voulue sur l'espérance de la variation de la fonction potentielle) de l'espérance de la variation de poids local d'une cellule correspondant à ce masque. Pour cela, il suffit de déterminer les cellules actives du motif (marquées par une croix sur les masques, les cellules marquées par un ? peuvent être éventuellement actives) et de calculer la probabilité de chaque mise à jour et la variation de poids local qu'elle entraîne. Quand nous étudions l'évolution d'un masque au temps $t + 1$, nous indiquons par une flèche les cellules se mettant à jour dans le masque et nous indiquons par un ? les cellules dont nous n'avons pas besoin de connaître l'état pour obtenir une borne sur la variation de poids local.

Conclusion de la preuve. L'espérance de la variation de la fonction potentielle pour une configuration c est majorée (minorée selon le cas) par $\sum_{m \in \mathcal{B}_2} b_m |c|_m$. Après avoir étudié les motifs de la base \mathcal{B}_2 , nous obtenons une majoration (minoration selon le cas) par une constante de la variation de fonction potentielle. Nous concluons en utilisant un des théorèmes sur les variations des fonctions potentielles du chapitre 1.

3.4 Analyse des temps de relaxation

3.4.1 Automate cellulaire $\mathbf{E}(200)$

Les configurations stables de cet automate cellulaire sont les configurations ne possédant pas de cellule correspondant au masque 010 . Le comportement de cet automate est celui d'un collectionneur de coupon : les cellules inactives ne redeviennent jamais actives et les cellules actives ont une probabilité α de devenir inactives.

Théorème 3.13 *En dynamique α -asynchrone, l'automate \mathbf{E} converge presque sûrement vers une configuration stable à partir de n'importe quelle configuration initiale. Le temps de relaxation est $\Theta\left(\frac{-\ln n}{\ln(1-\alpha)}\right)$.*

Preuve. Seules les cellules correspondant au masque 010 sont actives. Deux cellules voisines ne peuvent pas correspondre à ce masque. Donc si une cellule est active, ses deux voisines le sont aussi. De plus, mettre à jour une cellule correspondant à ce masque la rend inactive et ses voisines le restent. Ainsi l'automate converge quand toutes les cellules correspondant au masque 010 se sont mises à jour au moins une fois. Si n est pair, les pires configurations initiales sont donc $(01)^{n/2}$ et $(01)^{n/2}0$ où $n/2$ cellules sont actives. Si n est impair, les configurations $(01)^{n/2}0$ et $(01)^{n/2}0$ ont $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ cellules actives. Pour chaque cellule i active nous associons une variable aléatoire X_i qui correspond à la première fois où cette cellule se met à jour. Ces variables sont indépendantes, identiquement distribuées et suivent la loi géométrique de paramètre α (voir définition 1.9 de la page 26). Ainsi selon la proposition 1.30, $E[T] = \Theta\left(\frac{-\ln n}{\ln(1-\alpha)}\right)$. \square

3.4.2 Automate cellulaire $\mathbf{DE}(232)$

Les configurations stables de cet automate cellulaire sont les configurations ne possédant pas de cellule correspondant aux masques 010 et 101 . Le comportement de cet automate est celui d'un collectionneur de coupon : les cellules inactives ne redeviennent jamais actives et les cellules actives ont une probabilité plus grande que $\alpha(1-\alpha)$ de devenir inactives.

Théorème 3.14 *En dynamique α -asynchrone, l'automate \mathbf{DE} converge presque sûrement vers une configuration stable à partir de n'importe quelle configuration initiale. Le temps de relaxation est $O\left(\frac{-\ln n}{\ln(1-\alpha(1-\alpha))}\right)$ et $\Omega\left(\frac{-\ln n}{\ln(1-\alpha)}\right)$.*

Preuve. Seules les cellules correspondant aux masques 010 et 101 sont actives. Si une cellule active se met à jour et que sa voisine de gauche ne se met pas à jour alors ces deux cellules deviennent inactives. Cet événement se produit avec probabilité $\alpha(1-\alpha)$. Ainsi, quand cet événement s'est produit sur une cellule sur deux, la configuration a convergé, d'après la proposition 1.30, l'espérance du temps pour que ces événements se produisent est $\Theta\left(\frac{-\ln n}{\ln(1-\alpha(1-\alpha))}\right)$. Ainsi le temps de relaxation de cet automate est $O\left(\frac{-\ln n}{\ln(1-\alpha(1-\alpha))}\right)$.

Si une cellule active a une voisine inactive, alors en se mettant à jour, elle devient inactive. Ainsi, si nous considérons la configuration $(00100)^{\frac{n}{5}}$, une cellule sur cinq est active et en se

mettant à jour elle devient inactive. Ainsi, il faut que ces $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ cellules se mettent à jour au moins une fois pour que l'automate converge. D'après la proposition 1.30, le temps de convergence de cet automate sur cette configuration initiale est $\Theta(\frac{-\ln n}{\ln(1-\alpha)})$. Donc le temps de relaxation de cet automate est $\Omega(\frac{-\ln n}{\ln(1-\alpha)})$. \square

3.4.3 Automates cellulaires **EF**(192) et **EFG**(128)

Les configurations stables de ces automates cellulaires sont 0^n et 1^n . La configuration stable 1^n ne peut être atteinte à partir d'aucune autre configuration. Les frontières 01 se déplacent vers la droite et effacent les 1 au fur et à mesure de leur avancée. Pour l'automate cellulaire **EFG**, les frontières 10 effacent aussi les 1 en se déplaçant vers la gauche. La fonction potentielle que nous utilisons permet de traiter de façon identique les deux cas, le comportement de ces automates cellulaires étant très similaire. La base de masques et la fonction de poids locaux f sont définis dans l'image 3.1a. Pour toute configuration c , nous avons $F(c) = |c|_1$ donc $F(c) \in \{0, \dots, n\}$ et $F(c) = 0$ si et seulement si $c = 0^n$.

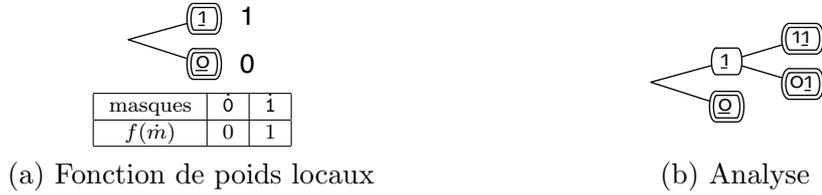


FIG. 3.1 – Bases de masques pour les automates **EF** et **EFG**.

Lemme 3.15 *Pour toute configuration c^t instable,*

$$\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] \leq -\alpha |c^t|_{01} \leq -\alpha.$$

Preuve. Par la linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)]$. Nous évaluons la variation de chaque $F(c^t, i)$ séparément en utilisant la base de masques de la figure 3.1b.

Énumérons les différentes possibilités données par la base de masques 3.1b. Considérons au temps t , une cellule i correspondant au masque :

- **masque $\hat{0}$** : Avec probabilité 1 au temps $t + 1$, la cellule i correspond au masque $\hat{0}$. Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] = 0$.
- **masque $\overset{?}{1}\overset{?}{1}$** : $F(c^t, i) = 1$ donc $F(c^{t+1}, i) \leq F(c^t, i)$, et $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq 0$.
- **masque $\overset{0}{\times}\overset{i}{1}$** :

Avec probabilité	α	$1 - \alpha$
À $t + 1$, la cellule i correspond à	$\overset{?}{\hat{0}}$	$\overset{?}{\hat{1}}$
et $\Delta F(c^t, i)$	$= -1$	$= 0$

Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq -\alpha$.

Finalement, $\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq -\alpha |c|_{01}$. Donc, tant que c^t n'est pas stable :

$$\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] \leq -\alpha |c|_{01} \leq -\alpha.$$

\square

Théorème 3.16 *En dynamique α -asynchrone, les automates **EF** et **EFG** convergent presque sûrement vers une configuration stable à partir de n'importe quelle configuration initiale. Le temps de relaxation est $\Theta(\frac{n}{\alpha})$.*

Preuve. Par le lemme 1.45 et le lemme 3.15, les automates cellulaires **EF** et **EFG** convergent presque sûrement vers la configuration stable 0^n à partir de n'importe quelle configuration initiale (sauf 1^n). Le temps de relaxation est $O(\frac{n}{\alpha})$.

Considérons la configuration où la cellule numéro 0 est dans l'état 0 et toutes les autres cellules dans l'état 1. Tant que la configuration n'a pas convergé, il existe au plus 2 cellules dans l'état 1 actives (les extrémités de l'unique 1-région). Il faut donc au moins $(n-1)/2$ mises à jour pour faire passer toutes les cellules dans l'état 1 à l'état 0. Avec une probabilité minorée par $(1-\alpha)^2$, aucune de ces deux cellules ne se met à jour et donc aucune cellule ne passe dans l'état 0. Le temps de convergence est donc $\Omega(\frac{n}{\alpha})$ depuis cette configuration initiale. \square

3.4.4 Automates cellulaires **B**(206) et **BC**(222)

Les configurations stables de ces automates cellulaires sont 0^n et 1^n et toutes les configurations sans le motif 00. La taille des 1-régions augmente régulièrement au cours du temps jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des 0-régions de taille 1. La base de masques et la fonction de poids locaux f sont définies dans l'image 3.2a. Pour toute configuration c , $F(c) \in \{0, \dots, n\}$, et $F(c) = 0$ si et seulement si $c = 1^n$.

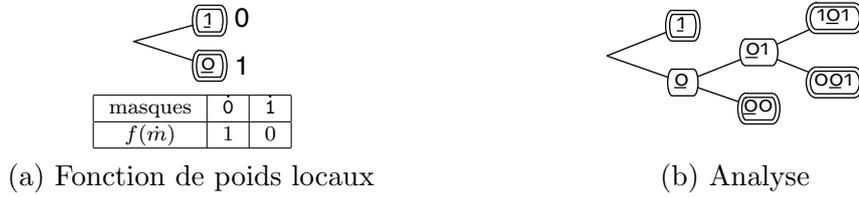


FIG. 3.2 – Bases de masques pour les automates **B** et **BC**.

Lemme 3.17 *Pour toute configuration c^t qui n'est pas stable,*

$$\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] \leq -\alpha |c^t|_{001} \leq -\alpha.$$

Preuve. Par la linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)]$. Nous évaluons la variation de chaque $F(c^t, i)$ séparément en utilisant la base de masques de la figure 3.2b.

Considérons au temps t , une cellule i correspondant au masque :

- **masques $1\dot{0}1, \dot{1}$** : avec probabilité 1 au temps $t+1$, la cellule i correspond au même masque qu'au temps t . Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] = 0$.
- **masque $\underset{?}{0}\underset{?}{0}$** : $F(c^t, i) = 1$. Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq 0$.
- **masque $\underset{?}{0}\underset{\times}{0}\dot{0}1$** : $F(c^t, i) = 1$. Avec probabilité α au temps $t+1$, la cellule i correspond au masque $\dot{1}$ et $\Delta F(c^t, i) = -1$. Autrement, elle correspond au masque $\underset{\uparrow}{\dot{0}}$ et $\Delta F(c^t, i) = 0$.
Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] = -\alpha$.

Finalement, $\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq -\alpha |c^t|_{001}$. Donc, tant que c^t n'est pas un point fixe :

$$\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] \leq -\alpha |c^t|_{001} \leq -\alpha.$$

\square

Théorème 3.18 *En dynamique α -asynchrone, les automates **B** et **BC** convergent presque sûrement vers une configuration stable à partir de n'importe quelle configuration initiale. Leur temps de relaxation est $\Theta(\frac{n}{\alpha})$.*

Preuve. Par les lemmes 1.45 et 3.17, les automates cellulaires **B** et **BC** convergent presque sûrement vers une configuration stable à partir de n'importe quelle configuration initiale. Leur temps de relaxation est $O(\frac{n}{\alpha})$.

Considérons la configuration où la cellule numéro 0 est dans l'état 1 et toutes les autres cellules dans l'état 0. La configuration va converger vers une configuration ne contenant qu'au plus une cellule 0. Tant que la configuration n'a pas convergé, il existe au plus 2 cellules dans l'état 0 actives (les extrémités de l'unique 0-région). Il faut donc au moins $(n-2)/2$ mises à jour pour faire passer suffisamment de cellules de l'état 0 à l'état 1. Avec une probabilité minorée par $(1-\alpha)^2$, aucune des deux cellules actives ne se met à jour et donc aucune cellule ne passe dans l'état 0. Leur temps de relaxation est donc $\Omega(\frac{n}{\alpha})$ pour cette configuration initiale. \square

3.4.5 Automates cellulaires BDE(234) et BCDE(250)

Les configurations stables de ces automates cellulaires sont 0^n et 1^n . La transition E est la seule transition active faisant passer une cellule de l'état 1 dans l'état 0. Ainsi dès qu'une configuration possède un motif 11, ce motif ne peut plus être modifié. Les transitions B et D font croître les 1-régions et l'automate cellulaire converge vers 1^n . La preuve est donc en deux parties. Dans un premier temps, nous étudions le temps nécessaire pour qu'un motif 010 disparaisse ou engendre un motif 11. Ensuite nous étudions le temps que prend un motif 11 pour s'étendre sur toute la configuration.

Considérons une cellule i correspondant au masque $\underset{\times \times ?}{0 \dot{1} 0}$:

Avec probabilité	$(1-\alpha)^2$	$\alpha(1-\alpha)$	$\alpha(1-\alpha)$	α^2
au temps $t+1$, la cellule i correspond au masque	$0\dot{1}?$	$\underset{\uparrow}{1}\dot{1}?$	$0\dot{0}?$	$\underset{\uparrow\uparrow}{1}\dot{0}?$

Ainsi, chaque motif 010 crée un motif 11 en un pas de temps avec une probabilité $\geq \alpha(1-\alpha)$. L'automate crée presque sûrement un motif 11, au bout d'un temps $O(\frac{1}{\alpha(1-\alpha)})$ en moyenne s'il n'a pas convergé auparavant.

Maintenant, nous calculons le temps de relaxation de ces deux automates cellulaires s'exécutant sur une configuration initiale possédant un motif 11. La base de masques et la fonction de poids locaux f sont définies dans l'image 3.3a. Pour toute configuration c , $F(c) \in \{0, \dots, n\}$ et $F(c) = 0$ si et seulement si $c = 1^n$.

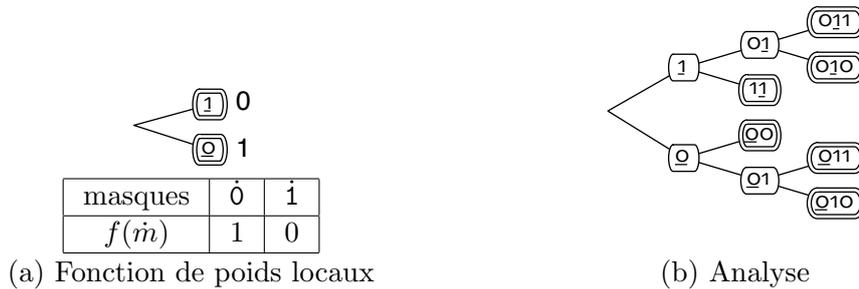


FIG. 3.3 – Base de masques pour les automates **BDE** et **BCDE**.

Lemme 3.19 Pour toute configuration c^t qui n'est pas stable et possédant un motif 11,

$$\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] \leq -\alpha |c^t|_{011} \leq -\alpha.$$

Preuve. Suivant l'arbre d'analyse 3.3b, considérons maintenant une cellule i au temps t correspondant au masque :

- **masque $\overset{\dot{1}}{\underset{\times}{0}}\overset{\dot{1}}{\underset{\times}{1}}$:** $F(c^t, i) = 0$. Avec probabilité 1 au temps $t + 1$, la cellule i correspond au masque $\overset{\dot{1}}{\underset{\times}{1}}$ et $F(c^{t+1}, i) = 0$. Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] = 0$.
- **masque $\overset{\dot{0}}{\underset{?}{0}}\overset{\dot{0}}{\underset{?}{0}}$:** $F(c^t, i) = 1$. Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq 0$.
- **masque $\overset{\dot{0}}{\underset{\times}{0}}\overset{\dot{1}}{\underset{\times}{1}}$:** $F(c^t, i) = 1$. Avec probabilité α au temps $t + 1$, la cellule i correspond au masque $\overset{\dot{1}}{\underset{\times}{1}}$. Sinon, elle correspond au masque $\overset{\dot{0}}{\underset{\times}{0}}$. Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] = -\alpha$.
- **masque $\overset{\dot{0}}{\underset{\times}{0}}\overset{\dot{1}}{\underset{\times}{0}}$ et sa voisine c_{i-1} de gauche de masque $\overset{\dot{0}}{\underset{\times}{0}}\overset{\dot{1}}{\underset{\times}{1}}$:**

Avec probabilité	$(1 - \alpha)^2$	$(1 - \alpha)\alpha$	$(1 - \alpha)\alpha$	α^2
à $t + 1$, la cellule i correspond au masque	$\overset{\dot{0}}{\underset{\times}{0}}\overset{\dot{1}}{\underset{\times}{1}}?$	$\overset{\dot{1}}{\underset{\times}{1}}\overset{\dot{1}}{\underset{\times}{1}}?$	$\overset{\dot{0}}{\underset{\times}{0}}\overset{\dot{0}}{\underset{\times}{0}}?$	$\overset{\dot{1}}{\underset{\times}{1}}\overset{\dot{0}}{\underset{\times}{0}}?$
$\Delta F(c^t, i - 1)$	$= 0$	$= -1$	$= 0$	$= -1$
$\Delta F(c^t, i)$	$= 0$	$= 0$	$= 1$	$= 1$

Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] = 0$.

Finalement, $\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq -\alpha |c^t|_{011}$. Donc, tant que c^t n'est pas la configuration stable 1^n et possède un motif 11 :

$$\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] \leq -\alpha |c^t|_{011} \leq -\alpha.$$

□

Théorème 3.20 *Sous la dynamique α -asynchrone, les automates **BDE** et **BCDE** convergent presque sûrement vers une configuration stable à partir de n'importe quelle configuration initiale. Pour l'automate **BDE**, son temps de relaxation est $\Theta\left(\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\right)$ et pour l'automate **BCDE**, le temps de relaxation est $O\left(\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\right)$ et $\Omega\left(\frac{n}{\alpha}\right)$.*

Preuve. Au bout d'un temps moyen $O\left(\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\right)$, les automates cellulaires **BDE** et **BCDE** créent, à partir d'une configuration initiale ne comportant pas de motif 11 , un tel motif ou ont convergé. Par les lemmes 1.45 et 3.19, ces automates cellulaires convergent presque sûrement vers une configuration stable à partir d'une configuration initiale comportant un motif 11 . Le temps de relaxation est $O\left(\frac{n}{\alpha}\right)$ sur de telles configurations. Ainsi, le temps de relaxation depuis n'importe quelle configuration initiale est donc $O\left(\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\right)$.

Considérons la configuration initiale où les cellules numéro 0 et numéro 1 sont dans l'état 1 et toutes les autres cellules dans l'état 0. Tant que la configuration n'a pas convergé, il existe au plus deux cellules dans l'état 0 actives (les extrémités de l'unique 0-région). Il faut donc au moins $\frac{n-2}{2}$ mises à jour pour faire passer toutes les cellules dans l'état 0 à l'état 1. Avec une probabilité minorée par $(1 - \alpha)^2$, aucune de ces deux cellules ne se met à jour et donc aucune cellule ne passe dans l'état 0. Le temps de relaxation est donc $\Omega\left(\frac{n}{\alpha}\right)$ pour cette configuration initiale.

Considérons l'automate **BDE** et la configuration initiale où la cellule numéro 0 est dans l'état 1 et toutes les autres cellules dans l'état 0. Au bout d'un temps $\Omega\left(\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\right)$ en moyenne soit avec probabilité 0.5 l'unique cellule dans l'état 1 passe dans l'état 0 et la dynamique converge, soit avec probabilité 0.5 un motif 11 est créé. Donc pour l'automate **BDE**, le temps de relaxation est $\Omega\left(\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\right)$ pour cette configuration initiale. □

3.4.6 Automates cellulaires BE(202) et BCE(218)

Les configurations stables de ces automates cellulaires sont 0^n , 1^n et toutes les configurations sans les motifs 00 et 010. Ces deux automates cellulaires sont presque semblables aux précédents. Dans un premier temps, on attend l'apparition d'un motif 11 (étude identique au cas précédent). Ensuite, la différence vient du fait que dans un motif 01011 le 1 isolé peut ralentir la croissance de la grande 1-région. En effet, pour que la grande 1-région de ce motif puisse s'agrandir il faut d'abord commencer par effacer le 1 isolé pour obtenir 00011 et ensuite la grande 1-région peut s'accroître en 00111. Nous calculons le temps de relaxation de ces automates cellulaires s'exécutant sur une configuration initiale possédant un motif 11. La base de masques et la fonction de poids locaux f sont définis dans la figure 3.4a. Remarquons que pour toute configuration c , $F(c) \in \{0, \dots, 3n - 6\}$ et $F(c) = 0$ si et seulement si $c = 1^n$.

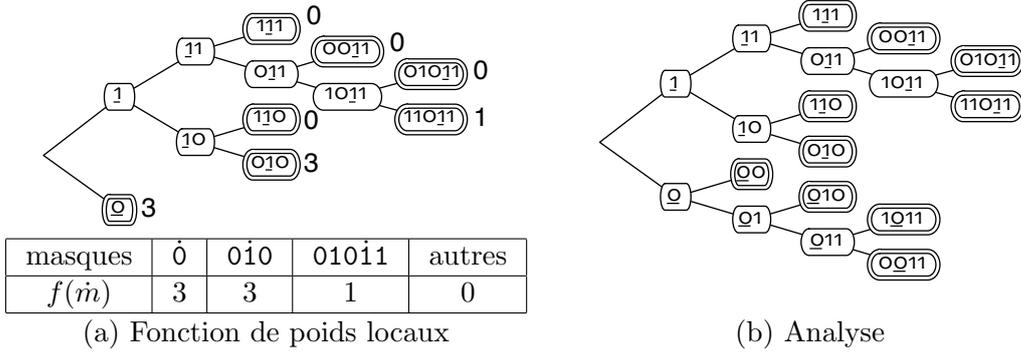


FIG. 3.4 – Bases de masques pour les automates **BE** et **BCE**.

Lemme 3.21 *Pour toute configuration c^t instable et possédant un motif 11,*

$$\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] \leq -\alpha(|c^t|_{0011} + |c^t|_{01011}) \leq -\alpha.$$

Preuve. Suivant l'arbre d'analyse 3.4b, considérons successivement une cellule i de masque :

- **masques** $\overset{?}{1}\dot{0}11$, $\overset{?}{1}1\dot{0}$, $1\dot{1}1$, $110\dot{1}1$: avec probabilité 1 au temps $t+1$, la cellule i correspond au même masque de l'arbre 3.4a qu'au temps t . Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] = 0$.
- **masques** $\overset{?}{0}\dot{0}$, $\overset{?}{0}\dot{1}0$, $\overset{?}{0}\dot{1}0$: $F(c^t, i) = 3$. Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq 0$.
- **masque** $\overset{?}{0}\dot{0}11$: $F(c^t, i) = 3$. Avec probabilité α la cellule i se met à jour et $F(c^{t+1}, i) \leq 1$. Sinon, elle correspond au masque $\dot{0}$. Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq -2\alpha$. Les 1 isolés ont un effet négatif sur la vitesse de convergence, mais cet effet est contrebalancé par la croissance des 1-régions.
- **masque** $\overset{?}{0}\dot{0}11$: $F(c^t, i) = 0$. Si la cellule $i-2$ est active et se met à jour, la cellule i peut éventuellement correspondre au masque $\overset{?}{0}1\dot{0}11$ au temps $t+1$ et $\Delta F(c^t, i) = 1$, ceci se produit avec une probabilité inférieure à α . Sinon, $\Delta F(c^t, i) = 0$. Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq \alpha$.
- **masque** $\overset{?}{0}1\dot{0}11$: $F(c^t, i) = 1$. Avec une probabilité α , la cellule $i-2$ se met à jour et la cellule i correspond au masque $\overset{?}{0}0\dot{0}11$ au temps $t+1$ et $F(c^{t+1}, i) = 0$. Sinon, $F(c^{t+1}) \leq 1$. Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq -\alpha$.

Finalement, $\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq -\alpha(2|c^t|_{0011} + |c^t|_{0011} - |c^t|_{01011}) \leq -\alpha(|c^t|_{0011} + |c^t|_{01011})$.
Donc, tant que c^t n'est pas stable et possède un motif 11 :

$$\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] \leq -\alpha(|c^t|_{0011} + |c^t|_{01011}) \leq -\alpha.$$

□

Théorème 3.22 *Sous la dynamique α -asynchrone, les automates **BE** et **BCE** convergent presque sûrement vers une configuration stable à partir de n'importe quelle configuration initiale. Pour l'automate **BE**, le temps de relaxation est $\Theta\left(\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\right)$ et pour l'automate **BCE**, le temps de relaxation est $O\left(\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\right)$ et $\Omega\left(\frac{n}{\alpha}\right)$.*

Preuve. En espérance au bout d'un temps $O\left(\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\right)$, à partir d'une configuration initiale sans motif 11 les automates cellulaires **BE** et **BCE** créent un tel motif ou ont convergé. Une fois le motif 11 apparu, ce motif étant stable, la configuration en comportera toujours un. Par les lemmes 1.45 et 3.21, ces automates cellulaires convergent ensuite presque sûrement vers une configuration stable à partir d'une configuration initiale comportant un motif 11. Le temps de relaxation est $O\left(\frac{n}{\alpha}\right)$ sur de telles configurations. Ainsi, le temps de relaxation depuis n'importe quelle configuration initiale est donc $O\left(\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\right)$.

Considérons la configuration initiale où les cellules numéro 0 et numéro 1 sont dans l'état 1 et toutes les autres cellules dans l'état 0. Cette configuration atteindra une configuration stable contenant au plus une cellule dans l'état 0. Tant que la configuration n'a pas convergé, il existe au plus deux cellules dans l'état 0 actives (les extrémités de l'unique 0-région). Il faut donc au moins $\frac{n-3}{2}$ mises à jour pour faire passer toutes les cellules sauf une, qui sont dans l'état 0, à l'état 1. Avec une probabilité minorée par $(1-\alpha)^2$, aucune de ces deux cellules ne se met à jour et donc aucune cellule ne passe dans l'état 0. Le temps de relaxation est donc $\Omega\left(\frac{n}{\alpha}\right)$ pour cette configuration initiale.

Considérons l'automate **BE** et la configuration initiale où la cellule numéro 0 est dans l'état 1 et toutes les autres cellules dans l'état 0. Au bout d'un temps $\Omega\left(\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\right)$ en moyenne soit avec probabilité 0.5 l'unique cellule dans l'état 1 passe dans l'état 0 et la dynamique converge, soit avec probabilité 0.5 un motif 11 est créé. Donc pour l'automate **BDE**, le temps de relaxation est $\Omega\left(\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\right)$ pour cette configuration initiale. □

3.4.7 Automate cellulaire BEFG(130)

Les configurations stables de cet automate cellulaire sont 0^n et 1^n . La configuration stable 1^n ne peut être atteinte à partir d'aucune autre configuration. La taille des grandes 1-régions a tendance à décroître : à cause de la transition **G**, les mouvements des frontières 110 effacent les 1. Mais considérons une cellule i sur une frontière 0011, le phénomène de fragmentation (mises à jour simultanées des cellules i (transition **B** active) et $i+1$ (transition **F** active)) peut créer de nouvelles régions. La cellule i correspondant au motif 001011 de la nouvelle 1-région créée par fragmentation, peut glisser le long de la configuration (mises à jour simultanées des cellules i (transition **E** active) et $i-1$ (transition **B**)). Néanmoins la création de ces nouvelles régions ne suffit pas à contrebalancer le fait que les 1 ont tendance à disparaître. Nous définissons la base de masques et la fonction de poids locaux f dans la figure 3.5a. Pour toute configuration c , $F(c) \in \{0, \dots, 5n\}$ et $F(c) = 0$ si et seulement si $c = 0^n$.

Lemme 3.23 *Pour toute configuration c^t qui n'est pas stable,*

$$\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] \leq -\alpha(1-\alpha)|c^t|_{01} \leq -\alpha(1-\alpha).$$

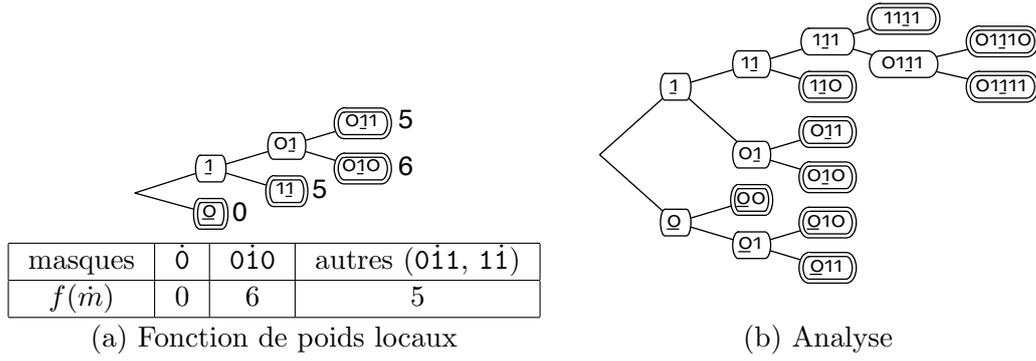


FIG. 3.5 – Bases de masques pour l'automate **BEFG**.

Preuve. Suivant l'arbre d'analyse 3.5b, considérons au temps t , une cellule i de type :

- **masque** $\overset{?}{0}\overset{?}{0}$: La cellule est inactive donc la cellule i correspond au masque $\overset{?}{0}$ à $t + 1$.
Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] = 0$.
- **masques** $\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$ et $\overset{?}{0}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$: Avec probabilité 1 au temps $t + 1$, la cellule i correspond au masque $\overset{?}{1}\overset{?}{1}$ pour $\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$ et à l'un des masques $\overset{?}{0}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$ ou $\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$ pour $\overset{?}{0}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$.
Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] = 0$.
- **masque** $\overset{?}{0}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$:

Avec probabilité	$\geq 1 - \alpha$	$\leq \alpha(1 - \alpha)$	$\leq \alpha^2$
Au temps $t + 1$, la cellule i correspond au masque	$\overset{?}{0}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$	$\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$	$\overset{?}{1}\overset{?}{0}\overset{?}{1}$
et $\Delta F(c^t, i)$	$= 0$	$= 5$	≤ 6

Les deux derniers cas sont possibles uniquement si $c_{i-1}^t = 0$ pour que la cellule i soit active.

Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq 5\alpha(1 - \alpha) + 6\alpha^2 \leq 6\alpha(1 - \alpha) + 6\alpha^2 \leq 6\alpha$.

- **masque** $\overset{?}{0}\overset{?}{1}\overset{?}{0}$ (et masque $\overset{?}{0}\overset{?}{1}\overset{?}{0}$ étudiés ensemble) :

Avec probabilité	$\geq \alpha(1 - \alpha)$	$\geq (1 - \alpha)^2$	$\leq \alpha(1 - \alpha)$	$\leq \alpha^2$
à $t + 1$, la cellule i correspond à	$\overset{?}{0}\overset{?}{0}\overset{?}{1}$	$\overset{?}{0}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$	$\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$	$\overset{?}{1}\overset{?}{0}\overset{?}{1}$
et $\Delta F(c^t, i - 1)$	$= 0$	$= 0$	$= 5$	≤ 6
et $\Delta F(c^t, i)$	$= -6$	$= 0$	$= -1$	$= -6$
$\Delta F(c^t, i - 1) + \Delta F(c^t, i)$	$\leq -6\alpha(1 - \alpha)$	$= 0$	$\leq 4\alpha(1 - \alpha)$	≤ 0

Les deux derniers cas sont possibles uniquement si $c_{i-2}^t = 0$.

Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i - 1) + \Delta F(c^t, i)] \leq -2\alpha(1 - \alpha)$.

– masque $\begin{smallmatrix} 0\dot{1}1 \\ ?\times? \end{smallmatrix}$:

Avec probabilité	α	$\geq (1 - \alpha)^2$	$\leq \alpha(1 - \alpha)$
au temps $t + 1$, la cellule i correspond au masque	$\begin{smallmatrix} ?\dot{0}? \\ \uparrow \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} ?\dot{1}1 \\ \uparrow \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} ?\dot{1}0 \\ \uparrow \end{smallmatrix}$
et $\Delta F(c^t, i)$	$= -5$	$= 0$	≤ 1

Le dernier cas est possible uniquement si $c_{i+2}^t = 0$.

Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq -5\alpha + \alpha(1 - \alpha) \leq -4\alpha$.

– masque $\begin{smallmatrix} 1\dot{1}0 \\ ?\times \end{smallmatrix}$:

Avec probabilité	α	$\geq (1 - \alpha)^2$	$\leq \alpha(1 - \alpha)$
au temps $t + 1$, la cellule i correspond au masque	$\begin{smallmatrix} ?\dot{0}? \\ \uparrow \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1\dot{1}? \\ \uparrow \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0\dot{1}? \\ \uparrow \end{smallmatrix}$
et $\Delta F(c^t, i)$	$= -5$	$= 0$	$= 1$

Le dernier cas est possible uniquement si $c_{i-2}^t = 0$.

Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq -4\alpha$.

– masque $\begin{smallmatrix} 0\dot{1}1\dot{1}0 \\ ?\times \times \end{smallmatrix}$:

Avec probabilité	α^2	$1 - \alpha^2$
au temps $t + 1$, la cellule i correspond au masque	$\begin{smallmatrix} ?\dot{0}\dot{1}0? \\ \uparrow \uparrow \end{smallmatrix}$	masque différent de $\begin{smallmatrix} ?\dot{0}\dot{1}0? \\ \uparrow \uparrow \end{smallmatrix}$
et $\Delta F(c^t, i)$	$= 1$	$= 0$

Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] = \alpha^2 \leq \alpha$.

Finalement,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq 6\alpha|c|_{011} - 2\alpha(1 - \alpha)|c|_{010} - 4\alpha|c|_{011} - 4\alpha|c|_{110} + \alpha|c|_{01110}.$$

Comme $|c|_{011} = |c|_{110}$ (ces motifs représentent les frontières droites et gauches des 1-régions de longueur au moins 2) et comme $|c|_{01110} \leq |c|_{110}$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq -2\alpha(1 - \alpha)|c|_{010} - \alpha|c|_{011} \leq -\alpha(1 - \alpha)|c|_{01}.$$

Donc, tant que c^t n'est pas stable :

$$\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] \leq -\alpha(1 - \alpha)|c|_{01} \leq -\alpha(1 - \alpha).$$

□

Théorème 3.24 *En dynamique α -asynchrone, l'automate **BEFG** converge presque sûrement vers une configuration stable à partir de n'importe quelle configuration initiale. Le temps de relaxation est $O(\frac{n}{\alpha(1-\alpha)})$ et $\Omega(\frac{n}{\alpha})$.*

Preuve. Par le lemme 1.45 et le lemme 3.23, l'automate cellulaire **BEFG** converge presque sûrement vers une configuration stable à partir de n'importe quelle configuration initiale. Le temps de relaxation est $O(\frac{n}{\alpha(1-\alpha)})$.

Considérons une configuration où pour tout $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ la cellule i est dans l'état 0 et pour tout $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq i \leq n - 1$ la cellule i est dans l'état 1. Cette configuration finira par converger vers tout-blanc ou tout-noir, le temps pour effacer une région de taille $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ est $\Omega(\frac{n}{\alpha})$. □

3.4.8 Automate cellulaire BCDEF(242)

Les configurations stables de cet automate cellulaire sont 0^n et 1^n . Le comportement de cet automate est semblable à celui de l'automate **BEFG**. Le phénomène de fragmentation permet de créer de nouvelles régions. La transition **C** étant active et la transition **G** inactive, le mouvement des frontières **110** fait décroître le nombre de 0. Cette dernière remarque est suffisante pour entraîner une convergence rapide vers une configuration stable. Un facteur $\frac{1}{1-\alpha}$ est nécessaire pour l'élimination des 0 isolés. La base de masques et la fonction de poids locaux f sont définis dans la figure 3.6a. Pour toute configuration c , $F(c) \in \{0, \dots, 5n\}$ et $F(c) = 0$ si et seulement si $c = 0^n$.

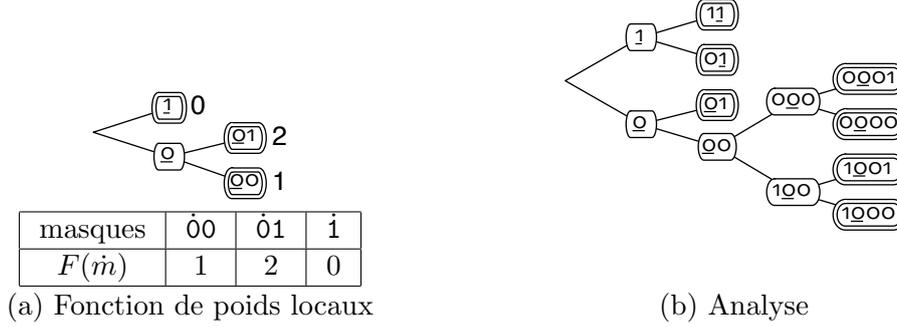


FIG. 3.6 – Bases de masques pour l'automate **BCDEF**.

Lemme 3.25 *Pour toute configuration instable c^t ,*

$$\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] \leq -\alpha(1-\alpha)|c^t|_{01} \leq -\alpha(1-\alpha).$$

Preuve. Suivant la base de masques de la figure 3.6b, considérons au temps t , une cellule i de type :

- **masque** $\overset{?}{?}\overset{?}{?}\overset{?}{?}\overset{?}{?}$: avec probabilité 1 au temps $t+1$, la cellule i correspond au masque $\overset{?}{?}\overset{?}{?}$.
Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] = 0$.
- **masque** $\overset{?}{?}\overset{?}{?}\overset{?}{?}$: avec probabilité 1 au temps $t+1$, la cellule i correspond au masque $\overset{?}{?}$.
Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] = 0$.
- **masque** $\overset{?}{?}\overset{?}{?}\overset{?}{?}$: avec probabilité α au temps $t+1$, la cellule i correspond au masque $\overset{?}{?}\overset{?}{?}$ et $\Delta F(c^t, i) = -1$. Sinon, elle correspond au masque $\overset{?}{?}\overset{?}{?}$ et $\Delta F(c^t, i) = 0$.
Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] = -\alpha$.
- **masque** $\overset{?}{?}\overset{?}{?}\overset{?}{?}$: avec probabilité α au temps $t+1$, la cellule i correspond au masque $\overset{?}{?}\overset{?}{?}$ et $\Delta F(c^t, i) = 1$. Sinon, elle correspond au masque $\overset{?}{?}\overset{?}{?}$ et $\Delta F(c^t, i) = 0$.
Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] = \alpha$.
- **masque** $\overset{?}{?}\overset{?}{?}\overset{?}{?}$:

Avec probabilité	α	$(1-\alpha)\alpha$	$(1-\alpha)^2$
au temps $t+1$, la cellule i correspond au masque	$\overset{?}{?}\overset{?}{?}$ ↑	$\overset{?}{?}\overset{?}{?}$ ↑	$\overset{?}{?}\overset{?}{?}$
et $\Delta F(c^t, i)$	$= -1$	$= 1$	$= 0$

Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] = -\alpha + \alpha(1 - \alpha) \leq 0$.

– masques $\underset{\times \times}{0\dot{1}}$ et $\underset{\times \times}{\dot{0}1}$ étudiés ensemble :

Avec probabilité	$(1 - \alpha)^2$	$\alpha(1 - \alpha)$	$\alpha(1 - \alpha)$	α^2
à $t + 1$, la cellule i correspond au masque	$0\dot{1}$	$\underset{\uparrow}{1\dot{1}}$	$\underset{\uparrow}{0\dot{0}}$	$\underset{\uparrow \uparrow}{1\dot{0}}$
et $\Delta F(c^t, i - 1)$	$= 0$	$= -2$	$= -1$	$= -2$
et $\Delta F(c^t, i)$	$= 0$	$= 0$	≤ 2	≤ 2
$\Delta F(c^t, i - 1) + \Delta F(c^t, i)$	$= 0$	$= -2$	≤ 1	≤ 0

Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i - 1) + \Delta F(c^t, i)] \leq -\alpha(1 - \alpha)$.

Finalement,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq -\alpha|c^t|_{1000} + \alpha|c^t|_{0001} - \alpha(1 - \alpha)|c^t|_{01}.$$

Comme $|c^t|_{1000} = |c^t|_{0001}$ (ces motifs représentent les frontières droites et gauches des 0-régions de longueur au moins 3),

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq -\alpha(1 - \alpha)|c^t|_{01}.$$

Donc tant que c^t n'est pas stable :

$$\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] \leq -\alpha(1 - \alpha)|c^t|_{01} \leq -\alpha(1 - \alpha).$$

□

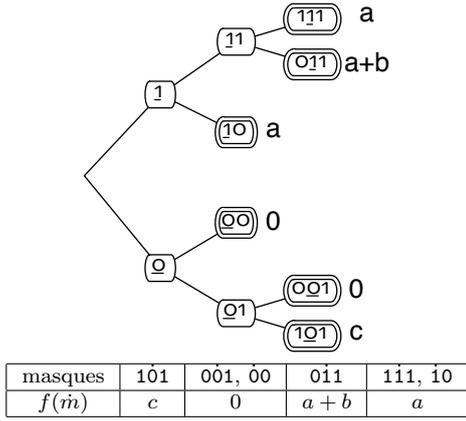
Théorème 3.26 *En dynamique α -asynchrone, l'automate **BCDEF** converge presque sûrement vers une configuration stable à partir de n'importe quelle configuration initiale. Leur temps de relaxation est $O(\frac{n}{\alpha(1-\alpha)})$ et $\Omega(\frac{n}{\alpha})$.*

Preuve. Par application directe des lemmes 1.45 et 3.25, le temps de relaxation de l'automate cellulaire **BCDEF** est $O(\frac{n}{\alpha(1-\alpha)})$.

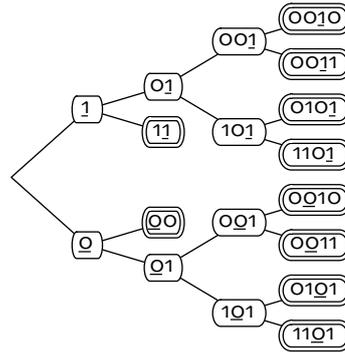
Comme pour l'automate **BEFG**, le temps de convergence de l'automate **BCDEF** est $\Omega(\frac{n}{\alpha})$ depuis une configuration initiale constituée d'une seule 1-région qui occupe la moitié de la configuration. □

3.4.9 Automate cellulaire **BEF**(194)

Les configurations stables de cet automate cellulaire sont 0^n et 1^n . La configuration stable 1^n ne peut être atteinte à partir d'aucune autre configuration. Cet automate est particulier car il présente une différence de comportement importante selon s'il évolue sous la dynamique totalement asynchrone ou α -asynchrone. En effet, sous la dynamique totalement asynchrone, les frontières 10 sont stables alors que les frontières 01 évoluent selon un processus de marche aléatoire non-biaisée. Le comportement global est donc celui d'une marche aléatoire et le temps de relaxation est $\Theta(n^3)$. En dynamique α -asynchrone, le phénomène de fragmentation fait décroître la taille des grandes 1-régions pour créer des 0-régions de taille 1. Ces petites régions ne survivent pas longtemps. Ainsi les grandes 1-régions s'érodent entraînant une convergence *plus rapide* qu'en dynamique totalement asynchrone (d'un facteur n). Le temps de relaxation devient ici $O(\frac{n}{\alpha^2(1-\alpha)})$. Posons $a = -2c + 2$, $b = -1$, $c = -\frac{2}{\alpha} - 1$. La base de masques et la fonction de poids locaux f sont définis dans la figure 3.7a. Pour toute configuration c , $F(c) \in [0, 2n(\frac{2}{\alpha} + 2)]$ et $F(c) = 0$ si et seulement si $c = 0^n$.



(a) Fonction de poids locaux



(b) Analyse

FIG. 3.7 – Bases de masques pour l'automate **BEF**.

Lemme 3.27 *Pour toute configuration instable c^t ,*

$$\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] \leq -\alpha(1-\alpha)|c^t|_{01} \leq -\alpha(1-\alpha).$$

Preuve. Suivant la base de masques de la figure 3.7b, considérons au temps t , une cellule i de type :

- **masque $\overset{?}{1}\overset{?}{1}$** : $F(c^t, i) = a$. Au temps $t+1$, la cellule i correspond certainement au masque $\overset{?}{1}\overset{?}{1}$. Donc $F(c^{t+1}, i) \in \{a, a+b\}$. Comme $b < 0$, $F(c^{t+1}, i) \leq F(c^t, i)$, on a $\mathbb{E}[(\Delta F(c^t, i))] \leq 0$.
- **masque $\overset{?}{0}\overset{?}{0}$** : $F(c^t, i) = 0$. Au temps $t+1$, la cellule i correspond certainement au masque $\overset{?}{0}\overset{?}{0}$. Donc $F(c^{t+1}, i) \in \{0, c\}$. Comme $c < 0$, $F(c^{t+1}, i) \leq F(c^t, i)$, on a, $\mathbb{E}[(\Delta F(c^t, i))] \leq 0$.
- **masques $\overset{?}{0}\overset{?}{1}\overset{?}{0}$ et $\overset{?}{0}\overset{?}{0}\overset{?}{1}\overset{?}{0}$ étudiés ensemble :**

Avec probabilité	$\alpha(1-\alpha)$	$\alpha(1-\alpha)$	$(1-\alpha)^2$	α^2
au temps $t+1$, la cellule i correspond au masque	$\overset{?}{0}\overset{?}{0}\overset{?}{0}$	$\overset{?}{0}\overset{?}{1}\overset{?}{0}$	$\overset{?}{0}\overset{?}{0}\overset{?}{1}\overset{?}{0}$	$\overset{?}{0}\overset{?}{1}\overset{?}{0}\overset{?}{0}$
et $\Delta F(c^t, i-1)$	$= 0$	$= a+b$	$= 0$	$= a$
et $\Delta F(c^t, i)$	$= -a$	$= 0$	$= 0$	$= -a$
$\Delta F(c^t, i-1) + \Delta F(c^t, i)$	$= -a$	$= a+b$	$= 0$	$= 0$

Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i) + \Delta F(c^t, i-1)] = -a\alpha(1-\alpha) + (a+b)\alpha(1-\alpha) = b\alpha(1-\alpha) = -\alpha(1-\alpha)$.

- **masques $\overset{?}{0}\overset{?}{0}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$ et $\overset{?}{0}\overset{?}{0}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$ étudiés ensemble :**

Avec probabilité	$\alpha(1-\alpha)$	$\alpha(1-\alpha)$	$(1-\alpha)^2$	α^2
au temps $t+1$, la cellule i correspond au masque	$\overset{?}{0}\overset{?}{0}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$	$\overset{?}{0}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$	$\overset{?}{0}\overset{?}{0}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$	$\overset{?}{0}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$
et $\Delta F(c^t, i-1)$	$= 0$	$= a+b$	$= 0$	$= a$
et $\Delta F(c^t, i)$	$= -a-b$	$= -b$	$= 0$	$= c-a-b$
$\Delta F(c^t, i-1) + \Delta F(c^t, i)$	$= -a-b$	$= a$	$= 0$	$= c-b$

Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i) + \Delta F(c^t, i-1)] = (-a-b)\alpha(1-\alpha) + a\alpha(1-\alpha) + (c-b)\alpha^2 \leq \alpha(1-\alpha) - 2\alpha \leq -\alpha(1-\alpha)$.

– masque $\begin{matrix} 110\dot{1} \\ ? \quad \times \end{matrix}$ et $\begin{matrix} 11\dot{0}1 \\ ? \quad \times \end{matrix}$ étudiés ensemble :

Avec probabilité	α	$(1 - \alpha)$
au temps $t + 1$, la cellule i correspond au masque	$\begin{matrix} ?10\dot{0} \\ \uparrow \end{matrix}$	$\begin{matrix} ?10\dot{1} \\ \uparrow \end{matrix}$
et $\Delta F(c^t, i - 1)$	$= -c$	$= 0$
et $\Delta F(c^t, i)$	$\leq -a - b$	$= 0$
$\Delta F(c^t, i - 1) + \Delta F(c^t, i)$	$\leq -a - b - c$	$= 0$

Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i) + \Delta F(c^t, i - 1)] = (-a - b - c)\alpha \leq -\alpha(1 - \alpha)$.

– masque $\begin{matrix} 010\dot{1} \\ ? \times \quad \times \end{matrix}$ et $\begin{matrix} 01\dot{0}1 \\ ? \times \quad \times \end{matrix}$ étudiés ensemble :

Avec probabilité	α	$(1 - \alpha)^2$	$\alpha(1 - \alpha)$
au temps $t + 1$, la cellule i correspond au masque	$\begin{matrix} ??0\dot{0} \\ \uparrow \end{matrix}$	$\begin{matrix} ?10\dot{1} \\ \uparrow \end{matrix}$	$\begin{matrix} ?00\dot{1} \\ \uparrow \end{matrix}$
et $\Delta F(c^t, i - 1)$	$= -c$	$= 0$	$= -c$
et $\Delta F(c^t, i)$	$\leq -a - b$	$= 0$	$= 0$
$\Delta F(c^t, i - 1) + \Delta F(c^t, i)$	$\leq -a - b - c$	$= 0$	$= -c$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Delta F(c^t, i) + \Delta F(c^t, i - 1)] &= (-a - b - c)\alpha - c\alpha(1 - \alpha) \\ &\leq (-a - b - 2c)\alpha(1 - \alpha) \\ &\leq -\alpha(1 - \alpha). \end{aligned}$$

Finalement

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq -\alpha(1 - \alpha)(|c^t|_{0010} + |c^t|_{0011} + |c^t|_{1101} + |c^t|_{0101})$$

Comme les masques 0010, 0011, 1011 et 0101 correspondent aux feuilles issues des noeuds 01 dans l'arbre de masque 3.7b, on a $|c^t|_{0010} + |c^t|_{0011} + |c^t|_{1101} + |c^t|_{0101} = |c^t|_{01}$, et donc

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq -\alpha(1 - \alpha)|c^t|_{01}.$$

Donc tant que c^t n'est pas stable :

$$\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] \leq -\alpha(1 - \alpha)|c^t|_{01} \leq -\alpha(1 - \alpha).$$

□

Théorème 3.28 *En dynamique α -asynchrone, l'automate **BEF** converge presque sûrement vers une configuration stable à partir de n'importe quelle configuration initiale. Le temps de relaxation est $O(\frac{n}{\alpha^2(1-\alpha)})$ et $\Omega(\frac{n}{\alpha})$.*

Preuve. Par application directe des lemmes 1.45 et 3.27, le temps de relaxation de l'automate cellulaire **BEF** est $O(\frac{n}{\alpha^2(1-\alpha)})$.

Le temps de convergence de l'automate **BEF** est $\Omega(\frac{n}{\alpha})$ depuis une configuration initiale possédant une seule cellule blanche, puisque la taille de la grande 1-région ne peut décroître que de 1 par pas de temps et cela avec probabilité α . □

3.4.10 Automate cellulaire BG(142)

Les configurations stables de cet automate cellulaire sont 0^n , 1^n et $(01)^{n/2}$ (si n est pair). Cet automate cellulaire ne peut pas faire disparaître de régions ou en faire apparaître. Il n’y a pas de configurations transitoires, toutes les configurations font partie d’une composante terminale de la chaîne de Markov qui représente l’automate. Les différentes composantes terminales sont déterminées par le nombre de régions.

Fait 3.29 *Les configurations stables de l’automate BG ne sont pas atteignables à partir d’autres configurations (ce sont des jardins d’Eden).*

Théorème 3.30 *Sous la dynamique asynchrone, l’automate BG diverge à partir de toute configuration initiale qui n’est pas stable.*

Cet automate présente donc le même type de comportement sous la dynamique synchrone et les dynamiques asynchrones.

3.4.11 Automate cellulaire BF(198)

Les configurations stables de cet automate cellulaire sont 0^n , 1^n et $(01)^{n/2}$ (si n est pair). Le phénomène de fragmentation permet de faire croître le nombre de régions et il n’existe aucun moyen de le faire décroître. Ainsi, les configurations 0^n et 1^n ne sont pas atteignables à partir d’autres configurations. La configuration $(01)^{n/2}$ est atteignable à partir de quelques rares autres configurations avec faible probabilité. Les frontières 10 de cet automate cellulaire sont stables. Considérons un motif $10^i 011^j 0$ où $i \geq 0$ et $j \geq 0$, les deux frontières 10 sont fixes et on peut donc étudier ce motif indépendamment du reste de la configuration. On peut donc découper la configuration en plusieurs motifs semblables et selon la valeur $i + j$, le comportement de ces motifs diffère :

- si $i = j = 0$ le motif 1010 est stable ;
- si $i + j = 1$ alors on constate une alternance entre les deux motifs 10010 et 10110 , la présence d’un tel motif empêche la configuration de converger ;
- si $i + j > 2$ alors la frontière 01 se déplace selon un processus de marche aléatoire jusqu’à ce qu’un processus de fragmentation crée deux nouvelles régions. Ce motif se divise donc en deux sous-motifs $10^{i_1} 1^{j_1} 10^{i_2} 1^{j_2} 0$ tel que $i_1 + i_2 + j_1 + j_2 = i + j$ qui sont de plus petites tailles et adoptent un des trois comportement cités. Si $i + j$ est impair, la taille d’un sous-motif sera toujours impair, donc si la configuration initiale comporte un tel motif, la configuration ne pourra jamais converger.

Il est donc très improbable de converger vers une configuration stable. Néanmoins, au bout d’un certain temps, L’automate cellulaire atteint des configurations qui ne comportent que les motifs 1010, 10010 et 10110. Nous évaluons ici, l’espérance du temps T que met la configuration dans le pire des cas pour atteindre une telle configuration. La base de masque et la fonction de poids locaux f sont définis dans la figure 3.8a. Pour toute configuration c , $F(c) \in \{0, \dots, \lceil \frac{3}{\alpha} \rceil \frac{n}{2}\}$ et $F(c) = 0$ si et seulement si $c = 0^n$.

Lemme 3.31 *Pour toute configuration c^t qui comporte un motif autre que 1010, 10010 et 10110,*

$$\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] \leq -\alpha(|c^t|_{10111} + |c^t|_{0011} + |c^t|_{00010}) \leq -\alpha.$$

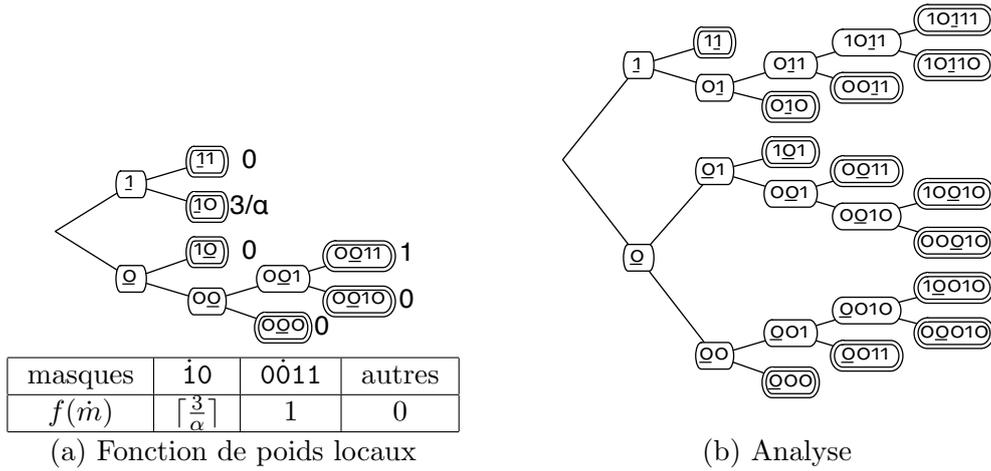


FIG. 3.8 – Bases de masques pour l'automate **BF**.

Preuve. Par la linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)]$. Nous évaluons la variation de $F(c^t, i)$ en utilisant la base de masques de la figure 3.8b.

Considérons au temps t , une cellule i correspondant au masque :

- **masques** $\underset{?}{1}\underset{?}{1}, \underset{?}{0}\underset{?}{1}0$: avec probabilité 1 au temps $t + 1$, la cellule i correspond à un masque de même poids qu'au temps t . Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] = 0$.
- **masques** $10\underset{\times}{1}110, 10\underset{\times}{0}10, \underset{?}{0}00, \underset{?}{1}0\underset{?}{1}, 10\underset{\times}{0}10, 00\underset{\times}{0}10$: $F(c^t, i) = 0$. Avec probabilité 1 au temps $t + 1$, $F(c^{t+1}, i) = 0$. Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] = 0$.
- **masques** $\underset{\times}{0}011, \underset{\times}{0}0\underset{\times}{1}1$: $F(c^t, i) = 0$. Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \geq 0$.
- **masques** $10\underset{\times}{1}11, 00\underset{\times}{0}10$: $F(c^t, i) = 0$. Avec probabilité α au temps $t + 1$, la cellule i correspond au masque 0011 . Sinon, elle correspond au même masque qu'au temps t . Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] = \alpha$.
- **masque** $\underset{\times}{0}0\underset{\times}{1}1$:

Avec probabilité	$(1 - \alpha)^2$	$(1 - \alpha)\alpha$	$(1 - \alpha)\alpha$	α^2
à $t + 1$, la cellule i correspond au masque	0011	0111 ↑	0001 ↑	0101 ↑↑
et $\Delta F(c^t, i)$	= 0	= -1	= -1	= $\lceil \frac{3}{\alpha} \rceil - 1$

Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] = -2(1 - \alpha)\alpha - \alpha^2 + \lceil \frac{3}{\alpha} \rceil \alpha^2 = -\alpha - (1 - \alpha)\alpha + \lceil \frac{3}{\alpha} \rceil \alpha^2 \geq -2\alpha + 3\alpha \geq \alpha$.

Finalement $\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \geq \alpha |c^t|_{0011} + \alpha |c^t|_{10111} + \alpha |c^t|_{11101}$. Donc tant que c^t comporte un motif autre que 1010, 10010 et 10110 :

$$\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] \geq \alpha |c^t|_{0011} + \alpha |c^t|_{10111} + \alpha |c^t|_{11101} \geq \alpha.$$

□

Théorème 3.32 *En dynamique α -asynchrone, l'automate **BF** atteint une configuration comportant uniquement les motifs 1010, 10010 et 10110 à partir de n'importe quelle configuration initiale. L'espérance du temps pour atteindre une telle configuration pour la première fois est $O(\frac{n}{\alpha^2})$ et $\Omega(\frac{n}{\alpha})$.*

Preuve. Par les lemmes 1.47 et 3.31, l'automate cellulaire **BF** atteint une configuration comportant uniquement les motifs 1010, 10010 et 10110 depuis n'importe quelle configuration initiale. L'espérance du temps pour atteindre une telle configuration est $O(\frac{n}{\alpha} \times \frac{1}{\alpha})$ (à cause de l'intervalle de valeurs dans lequel est comprise la fonction potentielle F).

Considérons la configuration de longueur n où la cellule numéro $n - 1$ est noire et toutes les autres cellules sont blanches. Ultiment, les cellules numéro 0 à 4 ne seront pas toutes les cinq blanches. Mais comme la transition C n'est pas active, pour que l'une de ces cellules devienne noire, il faut que toutes les autres cellules passent à noir au moins une fois. Ceci nécessite un temps $\Omega(\frac{n}{\alpha})$ en moyenne. Donc, le temps pour atteindre une configuration comportant uniquement les motifs 1010, 10010 et 10110 est $\Omega(\frac{n}{\alpha})$. \square

3.4.12 Automates cellulaires **BEG**(138), **BDEF**(226) et **BDEG**(170)

Les configurations stables de ces automates cellulaires sont 0^n et 1^n . Les régions se comportent comme des marches aléatoires. Ainsi le nombre de mouvements des frontières avant d'arriver à un point fixe est de l'ordre de $\Theta(n^2)$. La probabilité qu'une frontière bouge est minorée par $\alpha(1 - \alpha)$. Nous obtenons ainsi que le temps de relaxation est $O(\frac{n^2}{\alpha(1-\alpha)})$. Pour prouver ce résultat, nous utilisons la fonction potentielle $F(c^t) = |c^t|_1$.

Lemme 3.33 *Pour toute configuration instable c^t , pour les automates **BEG**, **BDEF** et **BDEG***

$$\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] \leq 0 \text{ et } P\{|\Delta F(c^t)| \geq 1\} \geq \alpha(1 - \alpha).$$

Preuve. À chaque fois qu'une cellule se trouvant dans le voisinage B ou D se met à jour, le nombre de 1 augmente de 1. À chaque fois qu'une cellule se trouvant dans le voisinage E, F ou G se met à jour, le nombre de 1 diminue de 1.

Pour **BEG** : $\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] = \alpha(|c^t|_{001} - |c^t|_{010} - |c^t|_{110}) \leq 0$.

Pour **BDEF** : $\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] = \alpha(|c^t|_{001} + |c^t|_{101} - |c^t|_{010} - |c^t|_{011}) = 0$.

Pour **BDEG** : $\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] = \alpha(|c^t|_{001} + |c^t|_{101} - |c^t|_{010} - |c^t|_{110}) = 0$.

Donc pour tous ces automates $\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] \leq 0$.

Maintenant nous devons évaluer la probabilité que $F(c^t)$ augmente ou diminue d'au moins un. Nous faisons la preuve pour **BDEF** (les autres cas sont semblables). Considérons une configuration c^t et un motif 01, les deux cellules de ce motif sont actives et toutes les cellules actives de la configuration appartiennent à un tel motif. Nous posons $k = |c^t|_{01}$, et numérotions arbitrairement les motifs 01 de 0 à $k - 1$. Pour chaque motif i , nous associons une variable aléatoire X_i définie de la façon suivante :

- $X_i = 0$ si le motif devient 01 ou 10 à $t + 1$,
- $X_i = -1$ si le motif devient 00 à $t + 1$,
- $X_i = 1$ si le motif devient 11 à $t + 1$.

Ainsi, nous avons $(\Delta F(c^t)) = \sum_{i=0}^{k-1} X_i$. Nous posons A la variable aléatoire correspond à l'ensemble des indices $j \in \{0, \dots, k - 1\}$ tels que $j \in A$ si et seulement si $X_j \neq 0$. Ainsi,

$$P\{|\Delta F(c^t)| \geq 1\} \geq P\{\text{il existe } i \text{ tel que } X_i \neq 0\}P\{\sum_{j \in A} X_j | A \neq \emptyset\}$$

De plus, $P\{\text{il existe } i \text{ tel que } X_i \neq 0\} \geq P\{X_0 \neq 0\}$. Regardons l'évolution d'un motif 01 :

Avec probabilité	$(1 - \alpha)^2$	$(1 - \alpha)\alpha$	$(1 - \alpha)\alpha$	α^2
au temps $t + 1$, le motif devient	01	11 ↑	00 ↑	10 ↑↑
et X_i	= 0	= 1	= -1	= 0

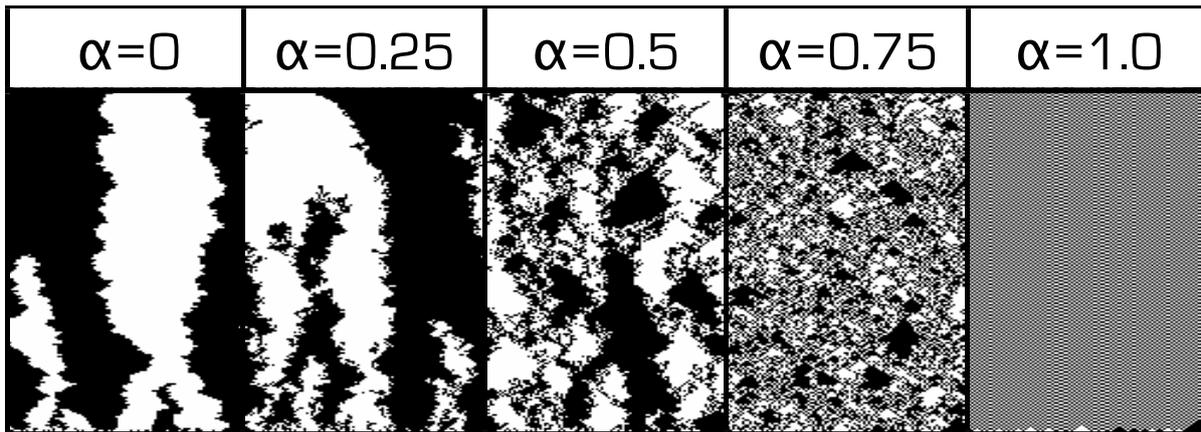


FIG. 3.9 – L'automate cellulaire **BCDEFG(178)** sous différentes dynamiques.

Donc $|X_i| \geq 1$ avec probabilité $2\alpha(1 - \alpha)$. Si $|A|$ est impair, alors $\sum_{j \in A} X_j \neq 0$. Si $|A|$ est pair et non nul, alors $\sum_{j \in A} X_j = \sum_{j=0}^{|A|-1} (X_j | X_j \neq 0)$ et $P\{X_j = 1 | X_j \neq 0\} = P\{X_j = -1 | X_j \neq 0\} = \frac{1}{2}$, donc $\sum_{j=0}^{|A|-1} (X_j | X_j \neq 0) = 0$ si et seulement si la moitié des variables aléatoires de $\{X_j : j \in A\}$ valent 1, cet événement arrive avec probabilité $\frac{C_{\frac{|A|}{2}}}{2^{|A|}} \leq \frac{1}{2}$. Donc $P\{|\Delta F(c^t)| \geq 1\} \geq \alpha(1 - \alpha)$. \square

Théorème 3.34 *Sous la dynamique α -asynchrone, les automates **BEG**, **BDEF** et **BDEG** convergent presque sûrement vers une configuration stable à partir de n'importe quel configuration initiale. Leur temps de relaxation est $O\left(\frac{n^2}{\alpha(1-\alpha)}\right)$ et $\Omega\left(\frac{n}{\alpha}\right)$.*

Preuve. Par les lemmes 1.46 et 3.33, le temps de relaxation des automates **BEG**, **BDEF** et **BDEG** est $O\left(\frac{n^2}{\alpha(1-\alpha)}\right)$. De plus, comme ces automates convergent vers tout-blanc depuis toute configuration initiale instable, l'espérance de leur temps de convergence sur une configuration ne comportant qu'une cellule blanche est $\Omega\left(\frac{n}{\alpha}\right)$. \square

3.5 Des automates cellulaires au comportement surprenant

Nous n'avons pas encore réussi à caractériser les cinq derniers types de comportements. Ceux-ci sont différents et beaucoup plus complexes que ceux des autres automates cellulaires étudiés. Néanmoins grâce à des simulations et l'étude de motifs particuliers, nous avons des idées sur les phénomènes entraînant de tels comportements.

Automate cellulaire BCDEFG(178), figure 3.9. Les configurations stables de cet automate cellulaire sont 0^n et 1^n . Les simulations montrent une transition de phase sur le temps de relaxation. Cette transition de phase est facilement visible sur les diagrammes espace-temps et semble se produire pour $\alpha = \alpha_c \approx 0.67$. Si $\alpha < \alpha_c$, le comportement global de l'automate cellulaire reste proche de son comportement sous le régime totalement asynchrone : les régions se comportent comme des marches aléatoires. Elles fusionnent, meurent, réduisant petit à petit leur nombre, et finalement l'automate converge vers une des configurations stables. Le temps de relaxation semble être en $O(n^2/\alpha)$. Si $\alpha > \alpha_c$, les grandes 0- et 1-régions se fragmentent rapidement sur leurs frontières et le motif 0101...01 se répand sur la configuration. Plus α est



FIG. 3.10 – L'automate cellulaire **BCEFG(146)** sous différentes dynamiques.

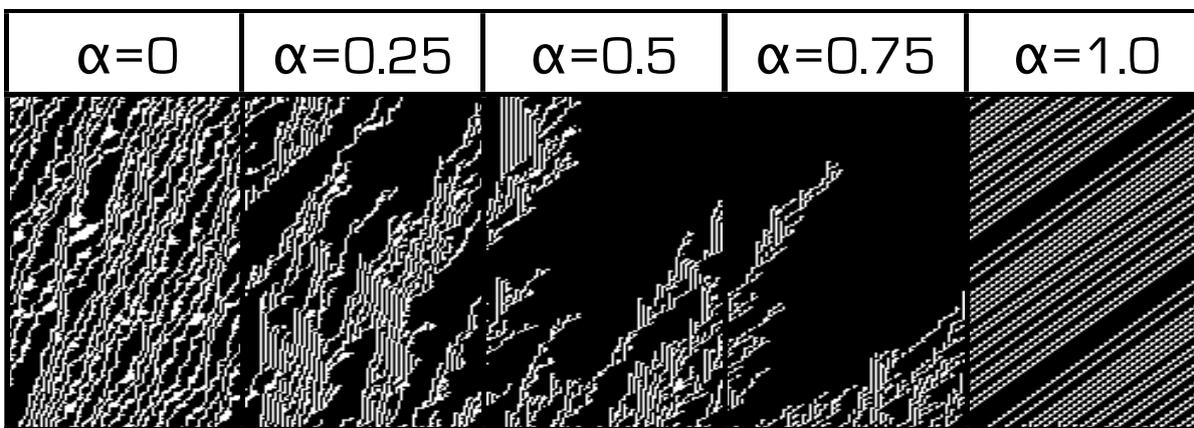


FIG. 3.11 – L'automate cellulaire **BCF(214)** sous différentes dynamiques.

proche de 1, plus la probabilité de voir des grandes régions se former est faible. Dans ce cas, nous conjecturons que le temps de relaxation est exponentiel en la taille de la configuration car par le théorème 1.42, ultimement la dynamique converge vers une configuration stable. Dans le chapitre 5, nous proposons une analyse plus poussée de cet automate en utilisant des résultats issus de la théorie de la percolation. Nous montrons que quand $\alpha > 0.996$ alors une configuration initiale 1D infinie avec une seule cellule noire a une probabilité constante strictement positive de diverger. En réutilisant des résultats de [64], ce théorème semble pouvoir s'adapter pour prouver un temps de relaxation exponentiel dans le cas de configurations 1D toriques.

Automate cellulaire BCEFG(146), figure 3.10. Les configurations stables de cet automate cellulaire sont 0^n et 1^n . Comme l'automate précédent, les simulations montrent une transition de phase semblant se produire cette fois-ci à $\alpha = \alpha_c \approx 0.8$. Quand $\alpha < \alpha_c$, les 1-régions finissent par disparaître rapidement, nous supposons que le temps de relaxation est polynomial. Quand $\alpha > \alpha_c$, les grandes régions se fragmentent rapidement. Mais, les 1 isolés se multiplient plus rapidement qu'ils ne disparaissent. Nous conjecturons que le temps de relaxation est exponentiel.

Automate cellulaire BCF(214), figure 3.11. Les configurations stables de cet automate cellulaire sont 0^n , 1^n et $(01)^{n/2}$ (si n est pair). Sous la dynamique totalement asynchrone, le

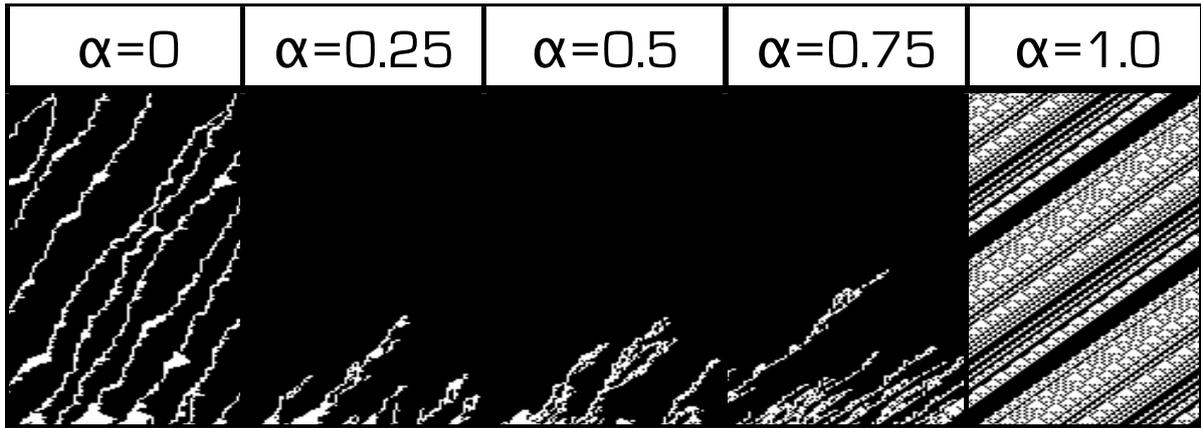


FIG. 3.12 – L'automate cellulaire **BCEF(210)** sous différentes dynamiques.

nombre de régions ne peut pas décroître, donc l'automate cellulaire diverge. Mais sous la dynamique α -asynchrone, le phénomène de disparition permet de faire décroître le nombre de régions et le phénomène de fragmentation permet de l'augmenter. La convergence vers une configuration stable est maintenant possible. Expérimentalement, la taille des 0-régions décroît rapidement. Finalement, on observe la formation de motifs 10011, la 0-région peut disparaître mais aussi se multiplier par fragmentation. Cette multiplication des 0-régions ralentit le processus. Mais le processus de disparition semble l'emporter sur le processus de fragmentation. Ainsi, nous conjecturons que le temps de relaxation est polynomial en la taille de la configuration : $O(\frac{n}{\alpha^2(1-\alpha)})$ et cela pour toute valeur de α . L'automate cellulaire ne semble pas présenter de transition de phase. Dans la partie 4, nous prouvons cette conjecture pour l'intervalle $1 > \alpha > 0.99990$ où certains phénomènes deviennent négligeables. Mais l'analyse de cas est beaucoup plus complexe que précédemment et les bases de masques se révèlent être indispensables pour la lisibilité de la preuve.

Automate cellulaire BCEF(210), figure 3.12. Les configurations stables de cet automate cellulaire sont 0^n et 1^n . Sous la dynamique totalement asynchrone, le temps de relaxation de cet automate cellulaire est exponentiel. La taille des 0-régions diminue rapidement sous les deux dynamiques asynchrones. Mais, grâce au phénomène de disparition, les 0-régions peuvent disparaître sous la dynamique α -asynchrone, ce qui accélère grandement la vitesse de convergence. Nous conjecturons que le temps de relaxation est polynomial. Cet automate cellulaire est très semblable au cas précédent. Sauf que les 0-régions peuvent fusionner, ce qui complique encore l'analyse.

Automate cellulaire BCFG(150), figure 3.13. Les configurations stables de cet automate cellulaire sont 0^n , 1^n et $(01)^{n/2}$ (si n est pair). Cet automate cellulaire ne peut pas converger sous la dynamique totalement asynchrone. Mais sous la dynamique α -asynchrone, le phénomène de disparition permet de faire converger l'automate en temps fini. Néanmoins, le temps de relaxation semble être exponentiel en la taille de la configuration. Cet automate cellulaire ne semble pas exhiber de structure particulière.

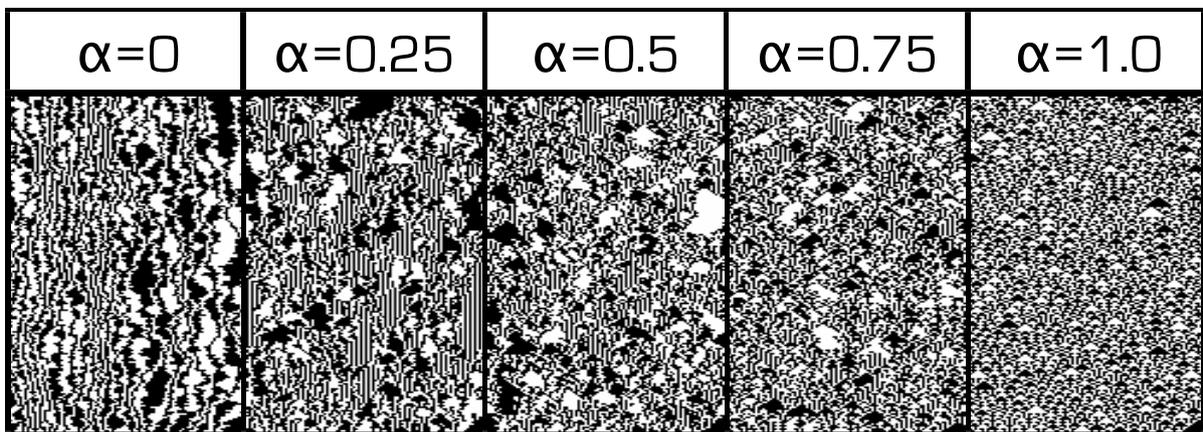


FIG. 3.13 – L'automate cellulaire **BCFG**(150) sous différentes dynamiques.

Chapitre 4

Un comportement original : l'automate cellulaire **BCF(214)**

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'automate **BCF(214)** [77]. Le comportement de cet automate cellulaire se révèle plus complexe que ceux rencontrés auparavant. Nous prouvons ici, que leur temps de relaxation est $O(\frac{n}{1-\alpha})$ pour $\alpha > 0.99990$. Cette analyse confirme notre conjecture pour un intervalle continu de valeurs de α . Ceci permet de confirmer le caractère particulier de cet automate qui présente un comportement radicalement différent sous la dynamique α -asynchrone comparé à son comportement en dynamiques totalement asynchrones ou synchrones. Pour obtenir ce résultat, nous avons dû prendre en compte un nouveau phénomène : la collision entre deux régions. Cet automate cellulaire fait donc intervenir un grand nombre de phénomènes différents, nous obligeant à étudier de larges motifs et donc à gérer de longues énumérations de cas. Ceci a été rendu possible grâce aux outils développés précédemment. Enfin, la borne $\alpha > 0.99990$ a été choisie pour pouvoir, lors de l'étude de l'évolution des motifs, négliger les cas où plus de deux cellules ne se mettent pas à jour dans les motifs considérés. Cette borne permet donc d'éliminer des phénomènes que nous n'avons pas encore compris. Les calculs n'ont pas été optimisés pour obtenir la meilleure borne possible. Mais en gardant notre fonction de poids locaux, des efforts supplémentaires n'apporteraient qu'une petite amélioration. Par contre, la raffiner, en prenant en compte les phénomènes que nous ne maîtrisons pas encore, pourrait aboutir à une nette amélioration de la borne. Également, notons que cet automate présente de grandes similitudes avec l'automate **BCF(210)**, notre fonction de poids locaux devrait, moyennant quelques efforts supplémentaires, permettre d'obtenir un résultat similaire pour cet automate. Nous commençons par présenter une description informelle détaillée de cet automate cellulaire. Puis, nous présentons la preuve.

4.1 Description informelle du comportement de l'automate **BCF(214)**

La figure 4.1 présente l'automate cellulaire **BCF** sous différentes dynamiques.

Cet automate cellulaire n'admet que trois configurations stables : 0^n , 1^n et $(01)^{(n/2)}$ quand n est pair. Sous la dynamique synchrone, **BCF** diverge à partir de toute configuration qui n'est pas stable. Sous la dynamique totalement asynchrone, le nombre de régions étant constant, une trajectoire ne peut pas converger à partir d'une configuration initiale qui n'est pas stable. Sous la dynamique α -asynchrone, il est possible de converger vers le point fixe 1^n comme le montre l'image 4.1d. Selon les simulations, le temps de relaxation semble être linéaire en la taille de la configuration, nous conjecturons qu'il est égal à $\frac{n}{\alpha^2(1-\alpha)}$ pour tout $0 < \alpha < 1$. Cette convergence

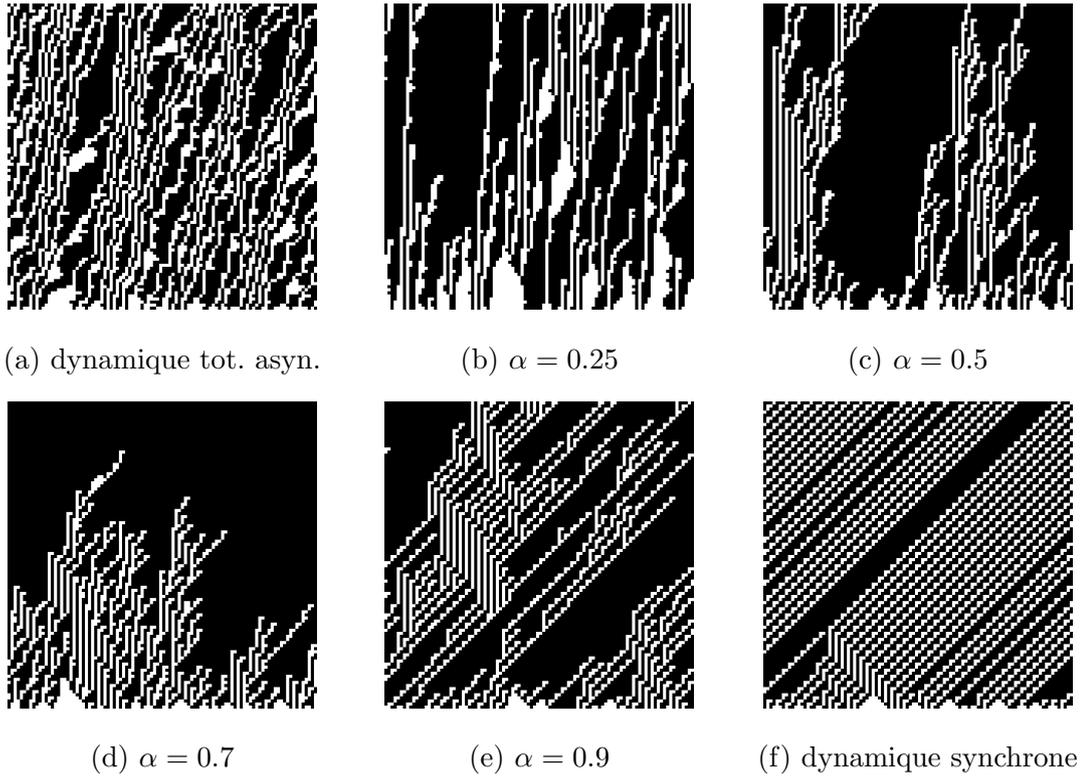


FIG. 4.1 – **BCF** sous différentes dynamiques.

rapide est due au phénomène de disparition : un motif 1001 peut évoluer en 1111 (le nombre de régions décroît). Mais le phénomène de fragmentation permet de faire croître le nombre de régions : 10011 peut évoluer en 10101. Ainsi ces deux phénomènes sont en compétition. Le motif 10011 semble être un élément clé du comportement de cet automate cellulaire, considérons donc son évolution :

Avec probabilité	le motif $\begin{matrix} 10011 \\ \times \times \times \end{matrix}$ devient	la distance à une configuration stable paraît
α^3	$\begin{matrix} 11101 \\ \uparrow \uparrow \uparrow \end{matrix}$	rester inchangée
$\alpha^2(1 - \alpha)$	$\begin{matrix} 11001 \\ \uparrow \uparrow \end{matrix}$	rester inchangée
$\alpha^2(1 - \alpha)$	$\begin{matrix} 10101 \\ \uparrow \uparrow \end{matrix}$	s'accroître
$\alpha^2(1 - \alpha)$	$\begin{matrix} 11111 \\ \uparrow \uparrow \end{matrix}$	décroître
$\alpha(1 - \alpha)^2$	$\begin{matrix} 10111 \\ \uparrow \end{matrix}$	rester inchangée
$\alpha(1 - \alpha)^2$	$\begin{matrix} 11011 \\ \uparrow \end{matrix}$	rester inchangée
$\alpha(1 - \alpha)^2$	$\begin{matrix} 10001 \\ \uparrow \end{matrix}$	s'accroître
$(1 - \alpha)^3$	10011	rester inchangée

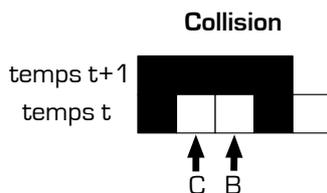
Ainsi la probabilité de supprimer une 0-région est $\alpha^2(1 - \alpha)$ et la probabilité de créer une nouvelle région est également $\alpha^2(1 - \alpha)$. De plus, la taille de la 0-région peut augmenter avec probabilité $\alpha(1 - \alpha)^2$. Ainsi nous avons isolé un phénomène indiquant une convergence rapide, mais nous avons deux obstacles à surmonter : l'agrandissement de la 0-région (10001) et la création d'une nouvelle 0-région (10101). Pour le premier obstacle, nous n'avons pas encore de

réponse, mais en considérant α proche de 1, ce phénomène devient négligeable comparé aux deux autres. C'est pourquoi nous posons $\alpha > 0.99990$: comme nous le verrons, cette borne permet de se débarrasser du premier problème.

Le but de cette section est d'apporter une réponse sur le deuxième obstacle et de prouver pourquoi le phénomène de disparition l'emporte sur le phénomène de fragmentation. Considérons le diagramme espace-temps sous la dynamique α -asynchrone pour $\alpha = 0.9$ de l'image 4.2a, les 0-régions sont proches les unes des autres et semblent se gêner. Le motif 10010 semble donc avoir un rôle important à jouer. Regardons en détail son évolution (? signifie 0 ou 1) :

Avec probabilité	le motif 10010 évolue en	la distance à une configuration stable semble
α^2	1111?	décroître
$\alpha(1 - \alpha)$	1101?	s'accroître légèrement
$\alpha(1 - \alpha)$	1011?	s'accroître légèrement
$(1 - \alpha)^2$	1001?	s'accroître légèrement si ? = 1

A cause de la présence de la deuxième 0-région, le phénomène de fragmentation ne peut pas avoir lieu. L'évolution la plus probable entraîne une diminution du nombre de régions. Dans un tel cas, nous disons qu'il y a un phénomène de collision :

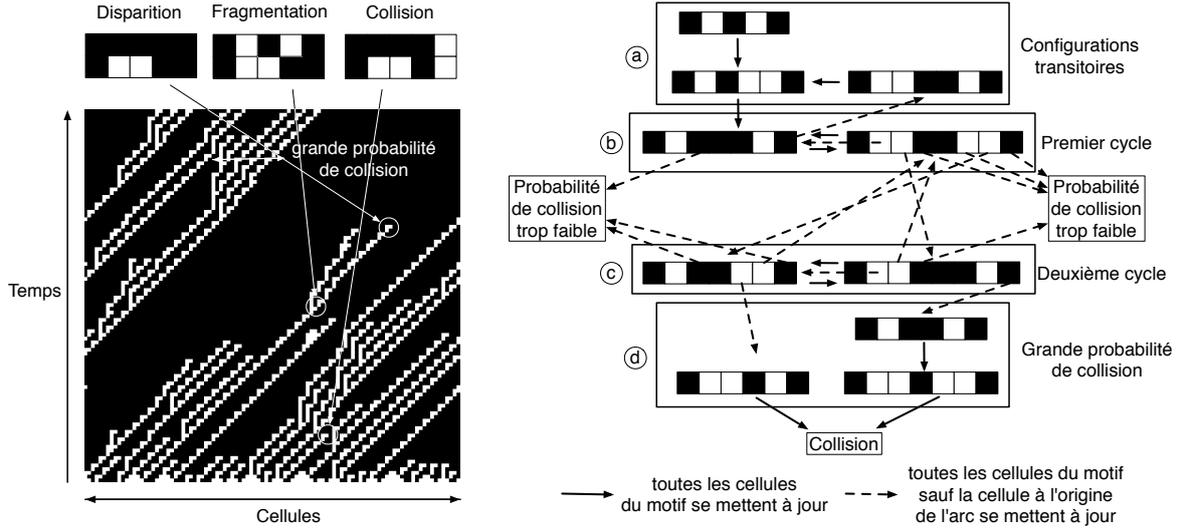


Collision : Ce phénomène est un cas particulier de la disparition d'une région par activation simultanée des transitions B et C. Dans le cas d'une collision, le phénomène de disparition peut avoir lieu mais pas celui de fragmentation.

Maintenant que nous avons exhibé un nouveau phénomène favorisant la convergence, remarquons que si un motif 10011 évolue en 10101 par fragmentation, alors les deux 0-régions sont très proches. La probabilité de collision ne semble donc pas négligeable dans ce cas. Si c'est le cas, il serait possible de définir des poids locaux tels que la variation locale des poids d'un motif 10011 soit négative.

Ainsi, nous nous intéressons au motif 10101 et notre but est de montrer que la probabilité de collision n'est pas négligeable. Nous avons choisi α de façon à négliger le fait que plus de deux cellules ne se mettent pas à jour. Nous pouvons donc considérer l'évolution du motif 10101 en dynamique synchrone où de temps en temps une cellule ne se met pas à jour. Pour que d'autres phénomènes n'interfèrent pas dans notre étude, nous supposons que toutes les cellules, se trouvant en dehors des motifs considérés, sont dans l'état 1. La figure 4.2b représente cette évolution. Les flèches noires représentent l'évolution synchrone et les flèches pointillées l'évolution où une cellule ne se met pas à jour.

- **Motifs 10101, 101001 et 100101** ① sur l'image 4.2b : si la configuration n'est pas la configuration stable $(01)^{n/2}$, ces motifs finiront toujours par évoluer en 1011101, ② sur l'image 4.2b.
- **Motifs 1011101 et 10011001** ③ sur l'image 4.2b : on assiste à un aller-retour entre ces deux motifs. À chaque aller-retour, ces motifs se traduisent de deux cellules vers la droite. Ceci dure jusqu'à ce qu'une cellule ne se mette pas à jour. Selon la cellule qui ne se met pas à jour soit la probabilité de collision devient négligeable, soit le motif devient 1011001



a) les trois phénomènes pris en compte dans notre étude. b) étude de la probabilité de collision à partir du motif 10101 quand α est proche de 1.

FIG. 4.2 – Explication des différents phénomènes.

ou 10011101, © sur l'image 4.2b.

- **Motifs 1011001 et 10011101** © sur l'image 4.2b : on assiste à un aller-retour entre ces deux motifs qui se translatent également de deux cellules vers la droite à chaque aller-retour. Ceci dure jusqu'à ce qu'une cellule ne se mette pas à jour. Selon la cellule qui ne se met pas à jour soit la probabilité de collision devient négligeable, soit on voit réapparaître un motif du premier cycle, soit le motif devient 100101 ou 101101, soit Ⓓ sur l'image 4.2b.
- **Motifs 100101 et 101101** Ⓓ sur l'image 4.2b : l'évolution la plus probable à partir de ces motifs provoque une collision entre les deux 0-régions.

La probabilité de collision n'est donc pas négligeable, il ne reste plus qu'à traduire ces observations en trouvant les bons poids locaux. C'est ce que nous faisons dans la prochaine section.

4.2 Preuve

Nous supposons dans cette partie que $\alpha > 0.99990$. Nous considérons le variant défini à partir de la base de masques de la figure 4.3. Ainsi :

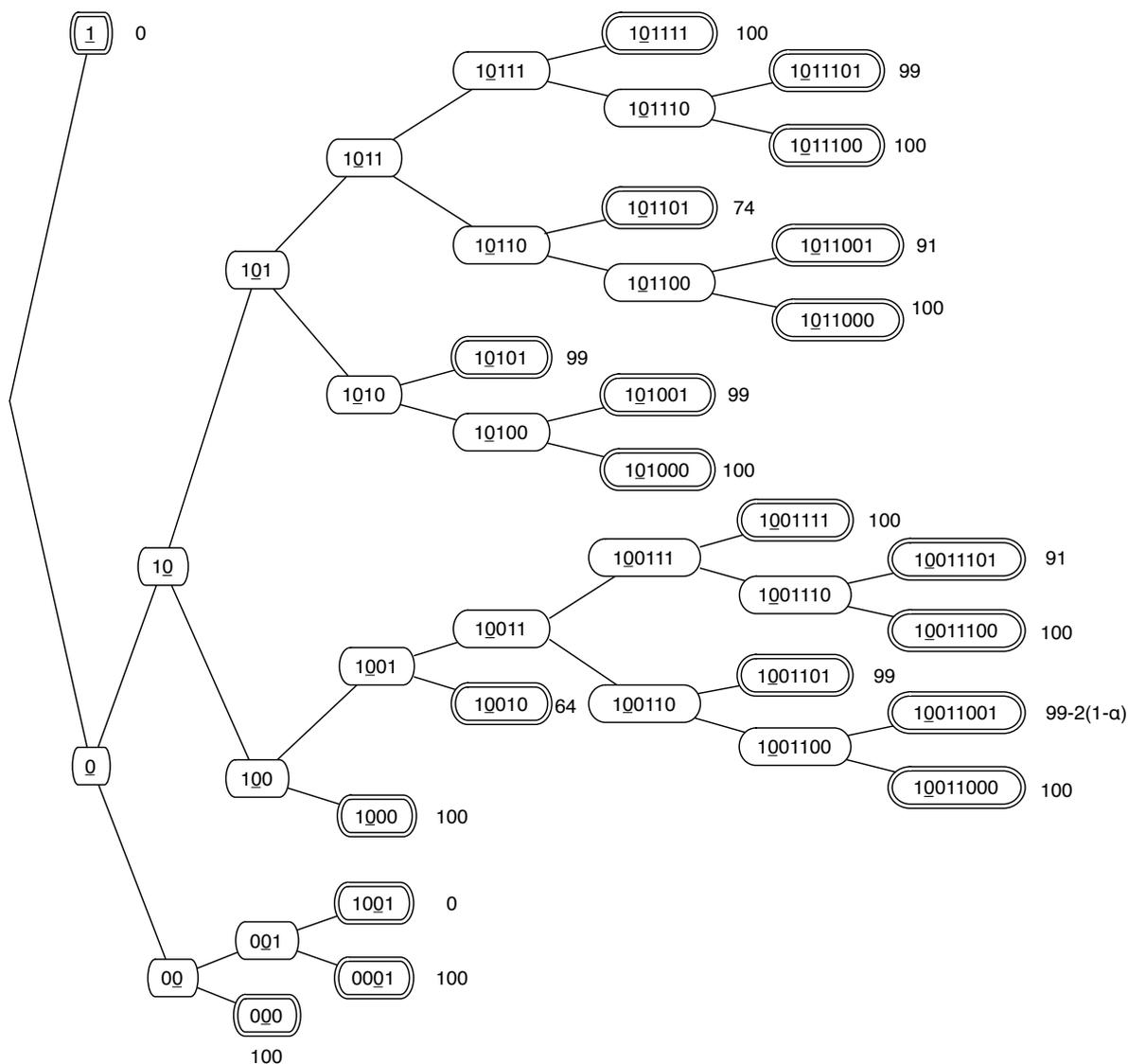
$$\begin{aligned}
 F(x) &= 64|x^t|_{10010} + 74|x^t|_{101101} + 91(|x^t|_{1011001} + |x^t|_{10011101}) \\
 &\quad + (99 - 2\alpha)|x^t|_{10011001} + 99(|x^t|_{1011101} + |x^t|_{10101} + |x^t|_{101001} \\
 &\quad + |x^t|_{1001101}) + 100(|x^t|_{1011111} + |x^t|_{1011100} + |x^t|_{1011000} + |x^t|_{101000} \\
 &\quad + |x^t|_{10011111} + |x^t|_{10011100} + |x^t|_{10011000} + |x^t|_{1000} + |x^t|_{000} + |x^t|_{0001}).
 \end{aligned}$$

Pour toute configuration c , $F(c) \in \{0, 1, \dots, 100n\}$ et $F(c) = 0$ si et seulement si $c = 1^n$.

Lemme 4.1 Pour toute configuration instable c^t et qui ne contient pas que des 0 isolés,

$$\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] \leq -0.3(1 - \alpha)|c^t|_{01} \leq -\alpha(1 - \alpha).$$

Pour les configurations ne comprenant que des 0 isolés $\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] \leq 0$.



masques	$f(\hat{m})$
1001, 1	0
10010	64
101101	74
1011001, 10011101	91
10011001	$99 - 2(1 - \alpha)$
1011101, 10101, 101001, 1001101	99
autres	100

FIG. 4.3 – fonction de poids locaux pour **BCF**.

Preuve. Par la linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)]$. Nous évaluons la variation de $F(c^t, i)$ en utilisant la base de masques de la figure 4.4 page 80.

Considérons au temps t , une cellule i correspondant au masque :

- **masques** $\underset{?}{1}\underset{?}{1}, \underset{\times \times}{100}\underset{?}{10}$: $F(c^t, i) = 0$. Avec probabilité 1 au temps $t+1$, la cellule i correspond au masque $\underset{?}{1}$. Donc $F(c^{t+1}, i) = 0$. Donc, $\Delta F(c^t, i) \leq 0$.
- **masques** $\underset{?}{0}\underset{?}{0}\underset{?}{0}, \underset{\times}{10}\underset{?}{1000}, \underset{\times \times}{10}\underset{\times}{11000}, \underset{\times}{10}\underset{\times \times}{11100}, \underset{\times}{10}\underset{\times}{1111}$: $F(c^t, i) = 100$. Donc, $\mathbb{E}[(\Delta F(c^t, i))] \leq 0$.
- **masque** $\underset{\times}{10}\underset{\times \times}{1100}\underset{?}{10}$: $F(c^t, i) = 91$. Donc, $\mathbb{E}[(\Delta F(c^t, i))] \leq 9$.
- **masque** $\underset{\times \times}{10}\underset{\times}{100}\underset{?}{10}$: $F(c^t, i) = 99$. Donc, $\mathbb{E}[(\Delta F(c^t, i))] \leq 1$.
- **masque** $\underset{?}{10}\underset{?}{1}$: $F(c^t, i) = 0$. Avec probabilité 1 au temps $t+1$, la cellule i correspond au masque $\underset{?}{1}$ ou $10\underset{?}{0}\underset{?}{1}$. Donc $F(c^{t+1}, i) = 0$. Donc, $\mathbb{E}[(\Delta F(c^t, i))] = 0$.
- **masque** $\underset{\times}{10}\underset{?}{10}\underset{?}{1}$: Avec probabilité 1 au temps $t+1$, la cellule i correspond au masque $\underset{?}{10}\underset{?}{10}\underset{?}{1}$ ou $\underset{?}{10}\underset{?}{100}\underset{?}{1}$. Donc, $\mathbb{E}[(\Delta F(c^t, i))] = 0$.
- **masque** $\underset{\times}{10}\underset{\times}{00}\underset{?}{1}$: $F(c^t, i) = 100$. Avec probabilité α au temps $t+1$, la cellule i correspond au masque $\underset{?}{1}$ ou $F(c^{t+1}, i) = 0$. Donc, $\mathbb{E}[(\Delta F(c^t, i))] \leq -100\alpha \leq -99$ car $\alpha > 0.99990$.
- **masques** $\underset{?}{00}\underset{\times}{0}\underset{?}{1}$ et $\underset{?}{000}\underset{\times}{1}$ étudiés ensemble :

Avec probabilité	à $t+1$, la cellule i correspond à	et $\Delta F(c^t, i)$	et $\Delta F(c^t, i+1)$	$\Delta F(c^t, i) + \Delta F(c^t, i+1)$
$\geq (1-\alpha)^2$	$\underset{?}{?}\underset{?}{0}\underset{?}{1}$	≤ 0	$= 0$	≤ 0
$\geq \alpha(1-\alpha)$	$\underset{?}{?}\underset{?}{1}\underset{?}{1}$ ↑	$= -100$	$= 0$	$= -100$
$\leq \alpha(1-\alpha)$	$\underset{?}{?}\underset{?}{0}\underset{?}{0}$ ↑	≤ 0	≤ 100	≤ 100
$\leq \alpha^2$	$\underset{?}{?}\underset{?}{1}\underset{?}{0}$ ↑↑	$= -100$	≤ 100	≤ 0

(Les deux derniers cas sont possibles si et seulement si la cellule $i+2$ est dans l'état 1.)
Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i) + \Delta F(c^t, i+1)] \leq 0$.

- **masques** $\underset{\times \times}{10}\underset{?}{0}\underset{?}{10}$ et $\underset{\times \times}{100}\underset{?}{10}$ étudiés ensemble :

Avec probabilité	au temps $t+1$, la cellule i correspond au masque	et $\Delta F(c^t, i) + \Delta F(c^t, i+1)$
α^2	$\underset{?}{?}\underset{?}{1}\underset{?}{1}\underset{?}{?}$ ↑↑	$= -64$
$1 - \alpha^2$	autres (au plus un des deux 0 devient un 1)	≤ 36

Puisque $\alpha > 0.99990$,

$$\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i) + \Delta F(c^t, i+1)] \leq -64\alpha^2 + 36(1 - \alpha^2) \leq -100\alpha^2 + 36 \leq -63.98 \leq -50.$$

- **masque** $\underset{\times}{10}\underset{?}{110}\underset{?}{1}$:

Avec probabilité	au temps $t+1$, la cellule i correspond au masque	et $\Delta F(c^t, i)$
$= \alpha$	$\underset{?}{10}\underset{?}{10}\underset{?}{?}$ ↑	$= -10$
$\leq \alpha(1-\alpha)$	$\underset{?}{10}\underset{?}{1100}\underset{?}{1}$ ↑	$= 17$
$\geq 1 - \alpha - \alpha(1-\alpha)$	$\underset{?}{10}\underset{?}{1101}$	$= 0$

(le second cas est possible si et seulement si la cellule $i + 5$ est dans l'état 1.)
Puisque $\alpha > 0.99990$, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq -10\alpha + 17\alpha(1 - \alpha) \leq -2$.

– masque $\underset{\times}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\underset{?}{1}\underset{?}{1}\underset{?}{0}\underset{?}{1}$:

Avec probabilité	au temps $t + 1$, la cellule i correspond au masque	et $\Delta F(c^t, i)$
$\geq (1 - \alpha)^2$	$\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\underset{?}{1}\underset{?}{1}\underset{?}{0}\underset{?}{1}$	$= 0$
$\leq \alpha(1 - \alpha)$	$\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\underset{?}{1}\underset{?}{1}\underset{?}{0}\underset{?}{1}$	$= 1$
$\geq \alpha(1 - \alpha)$	$\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\underset{?}{1}\underset{?}{1}\underset{?}{0}\underset{?}{1}$	$= 0$
$\leq \alpha^2$	$\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\underset{?}{1}\underset{?}{1}\underset{?}{0}\underset{?}{1}$	$= -2(1 - \alpha)$

Si la cellule $i + 6$ est dans l'état 0, le second et le quatrième cas sont impossibles et $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] = 0$. Autrement, puisque $\alpha > 0.99990$,

$$\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] = \alpha(1 - \alpha) - 2\alpha^2(1 - \alpha) \leq 0.$$

Donc, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq 0$.

– masque $\underset{\times\times\times}{1}\overset{?}{0}\underset{\times\times\times}{1}\overset{?}{0}\underset{\times\times\times}{0}\underset{\times\times\times}{1}\underset{\times\times\times}{1}$:

Avec probabilité	au temps $t + 1$, la cellule i correspond au masque	et $\Delta F(c^t, i)$
α^3	$\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\overset{?}{1}$	$= 0$
$\alpha^2(1 - \alpha)$	$\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\overset{?}{1}$	$= 0$
$\alpha^2(1 - \alpha)$	$\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$	$= 1$
$\alpha^2(1 - \alpha)$	$\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\overset{?}{1}$	$= -8$
$1 - \alpha^3 - 3\alpha^2(1 - \alpha)$	autres	≤ 1

Puisque $\alpha > 0.99990$, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq -7\alpha^2(1 - \alpha) + (1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha) \leq -5(1 - \alpha)$.

– masque $\underset{\times}{1}\overset{?}{0}\underset{\times}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{\times\times\times}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$:

Avec probabilité	au temps $t + 1$, la cellule i correspond au masque	et $\Delta F(c^t, i)$
α^4	$\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$	$= 0$
$\alpha^3(1 - \alpha)$	$\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$	$= -27$
$\alpha^3(1 - \alpha)$	$\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$	$= 9$
$\alpha^3(1 - \alpha)$	$\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$	≤ 8
$\alpha^3(1 - \alpha)$	$\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$	$= 9$
$(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha + 3\alpha^2)$	autres	≤ 9

Puisque $\alpha > 0.99990$, alors $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq -\alpha^3(1 - \alpha) + 9(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha + 3\alpha^2) \leq -0.8(1 - \alpha)$.

– masques $\underset{\times\times\times}{1}\overset{?}{0}\underset{\times\times\times}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$, $\underset{\times\times\times}{1}\overset{?}{0}\underset{\times\times\times}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$ et $\underset{\times\times\times}{1}\overset{?}{0}\underset{\times\times\times}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$ étudiés ensemble :

Avec probabilité	à $t + 1$, i correspond à	et $\Delta F(c^t, i)$	et $\Delta F(c^t, i + 1)$	et $\Delta F(c^t, i + 2)$	total
α^3	$\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$	$= -100$	$= 0$	≤ 100	≤ 0
$\alpha^2(1 - \alpha)$	$\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$	$= -1$	$= 0$	≤ 100	≤ 99
$\alpha^2(1 - \alpha)$	$\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}$	$= -100$	$= 0$	$= 0$	$= -100$
$\alpha^2(1 - \alpha)$	$\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{1}\overset{?}{0}\underset{?}{1}\overset{?}{1}$	$= -100$	$= 100$	$= 0$	≤ 0
$(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha)$	autres	≤ 0	≤ 100	≤ 100	≤ 200

Puisque $\alpha > 0.99990$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i) + \Delta F(c^t, i + 1) + \Delta F(c^t, i + 2)] &\leq -\alpha^2(1 - \alpha) + 200(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha) \\ &\leq (1 - \alpha)(-\alpha^2 + 600(1 - \alpha)) \\ &\leq -0.3(1 - \alpha).\end{aligned}$$

– masques $\overset{1}{\times}\overset{0}{\times}\overset{0}{\times}\overset{1}{\times}1000$, $\overset{1}{\times}\overset{0}{\times}\overset{0}{\times}\overset{1}{\times}1000$ et $\overset{1}{\times}\overset{0}{\times}\overset{1}{\times}1000$ étudiés ensemble :

Avec probabilité	à $t + 1$, i correspond à	et $\Delta F(c^t, i)$	et $\Delta F(c^t, i + 1)$	et $\Delta F(c^t, i + 2)$	total
α^3	$\overset{1}{\uparrow}\overset{1}{\uparrow}\overset{0}{\uparrow}1?0?$	$= -100$	$= 0$	≤ 100	≤ 0
$\alpha^2(1 - \alpha)$	$\overset{1}{\uparrow}\overset{0}{\uparrow}101?0?$	$= -1$	$= 0$	≤ 100	≤ 99
$\alpha^2(1 - \alpha)$	$\overset{1}{\uparrow}\overset{1}{\uparrow}\overset{1}{\uparrow}11?0?$	$= -100$	$= 0$	$= 0$	$= -100$
$\alpha^2(1 - \alpha)$	$\overset{1}{\uparrow}\overset{1}{\uparrow}001?0?$	$= -100$	≤ 100	$= 0$	≤ 0
$(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha)$	autres	≤ 0	≤ 100	≤ 100	≤ 200

Comme précédemment, $\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i) + \Delta F(c^t, i + 1) + \Delta F(c^t, i + 2)] \leq -0.3(1 - \alpha)$.

– masques $\overset{1}{\times}\overset{0}{\times}\overset{0}{\times}1101$, $\overset{1}{\times}\overset{0}{\times}\overset{0}{\times}1101$ et $\overset{1}{\times}\overset{0}{\times}\overset{1}{\times}1101$ étudiés ensemble :

Avec probabilité	à $t + 1$, i correspond à	et $\Delta F(c^t, i)$	et $\Delta F(c^t, i + 1)$	et $\Delta F(c^t, i + 2)$	total
α^3	$\overset{1}{\uparrow}\overset{1}{\uparrow}\overset{0}{\uparrow}101$ ou $\overset{1}{\uparrow}\overset{1}{\uparrow}\overset{0}{\uparrow}101001$	$= -99$	$= 0$	$= 99$	$= 0$
$\alpha^2(1 - \alpha)$	$\overset{1}{\uparrow}\overset{0}{\uparrow}10101$ ou $\overset{1}{\uparrow}\overset{0}{\uparrow}10101001$	$= 0$	$= 0$	$= 99$	$= 99$
$\alpha^2(1 - \alpha)$	$\overset{1}{\uparrow}\overset{1}{\uparrow}\overset{1}{\uparrow}11110?$	$= -99$	$= 0$	$= 0$	$= -99$
$\alpha^2(1 - \alpha)$	$\overset{1}{\uparrow}\overset{1}{\uparrow}0010?$	$= -99$	$= 64$	$= 0$	$= -35$
$(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha)$	autres	≤ 1	≤ 100	≤ 100	≤ 201

Puisque $\alpha > 0.99990$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i) + \Delta F(c^t, i + 1) + \Delta F(c^t, i + 2)] &\leq -35\alpha^2(1 - \alpha) + 201(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha) \\ &\leq (1 - \alpha)(-35\alpha^2 + 603(1 - \alpha)) \\ &\leq -15(1 - \alpha).\end{aligned}$$

– masques $\overset{1}{\times}\overset{0}{\times}\overset{0}{\times}11100$, $\overset{1}{\times}\overset{0}{\times}\overset{0}{\times}11100$ et $\overset{1}{\times}\overset{0}{\times}\overset{1}{\times}11100$ étudiés ensemble :

Avec probabilité	à $t + 1$, i correspond à	et $\Delta F(c^t, i)$	et $\Delta F(c^t, i + 1)$	et $\Delta F(c^t, i + 2)$	total
α^3	$\overset{1}{\uparrow}\overset{1}{\uparrow}\overset{0}{\uparrow}11011??$	$= -100$	$= 0$	≤ 100	≤ 0
$\alpha^2(1 - \alpha)$	$\overset{1}{\uparrow}\overset{0}{\uparrow}101011??$	$= -1$	$= 0$	≤ 100	≤ 99
$\alpha^2(1 - \alpha)$	$\overset{1}{\uparrow}\overset{1}{\uparrow}\overset{1}{\uparrow}111111??$	$= -100$	$= 0$	$= 0$	$= -100$
$\alpha^2(1 - \alpha)$	$\overset{1}{\uparrow}\overset{1}{\uparrow}00111??$	$= -100$	≤ 100	$= 0$	≤ 0
$(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha)$	autres	≤ 0	≤ 100	≤ 100	≤ 200

Puisque $\alpha > 0.99990$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i) + \Delta F(c^t, i + 1) + \Delta F(c^t, i + 2)] &\leq -\alpha^2(1 - \alpha) + 200(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha) \\ &\leq (1 - \alpha)(-\alpha^2 + 600(1 - \alpha)) \\ &\leq -0.3(1 - \alpha).\end{aligned}$$

– masques $\underset{\times\times\times}{1\dot{0}0111011}$, $\underset{\times\times\times}{10\dot{0}111011}$ et $\underset{\times\times\times}{100\dot{1}11011}$ étudiés ensemble :

Avec probabilité	à $t+1$, i correspond à	$\Delta F(c^t, i)$	$\Delta F(c^t, i+1)$	$\Delta F(c^t, i+2)$	total
α^4	$\underset{\uparrow\uparrow\uparrow}{111011001}$	$= -91$	$= 0$	$= 91$	$= 0$
$\alpha^3(1-\alpha)$	$\underset{\uparrow\uparrow}{101011001}$	$= 8$	$= 0$	$= 91$	$= 99$
$\alpha^3(1-\alpha)$	$\underset{\uparrow\uparrow}{111111001}$	$= -91$	$= 0$	$= 0$	$= -91$
$\alpha^3(1-\alpha)$	$\underset{\uparrow\uparrow}{110011001}$	$= -91$	$= 99 - 2(1-\alpha) \leq 99$	$= 0$	≤ 8
$\alpha^3(1-\alpha)$	$\underset{\uparrow\uparrow}{111011011}$	$= -91$	$= 0$	$= 74$	$= 17$
$(1-\alpha)^2k$	autres	≤ 9	≤ 100	≤ 100	≤ 209

Nous posons $k = (1 + 2\alpha + 3\alpha^2)$. Puisque $\alpha > 0.99990$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Delta F(c^t, i) + \Delta F(c^t, i+1) + \Delta F(c^t, i+2)] &\leq -\alpha^2(1-\alpha) + 209(1-\alpha)^2(1+2\alpha+3\alpha^2) \\ &\leq (1-\alpha)(-\alpha^2 + 1254(1-\alpha)) \\ &\leq -0.8(1-\alpha). \end{aligned}$$

– masques $\underset{\times\times\times}{1\dot{0}0111010}$, $\underset{\times\times\times}{10\dot{0}111010}$ et $\underset{\times\times\times}{100\dot{1}11010}$ étudiés ensemble :

Avec probabilité	à $t+1$, i correspond à	et $\Delta F(c^t, i)$	et $\Delta F(c^t, i+1)$	et $\Delta F(c^t, i+2)$	total
α^3	$\underset{\uparrow\uparrow\uparrow}{11101101?}$	$= -91$	$= 0$	$= 74$	$= -17$
$\alpha^2(1-\alpha)$	$\underset{\uparrow\uparrow}{10101101?}$	$= 8$	$= 0$	$= 74$	$= 82$
$\alpha^2(1-\alpha)$	$\underset{\uparrow\uparrow}{11111101?}$	$= -91$	$= 0$	$= 0$	$= -91$
$\alpha^2(1-\alpha)$	$\underset{\uparrow\uparrow}{11001101?}$	$= -91$	$= 99$	$= 0$	$= 8$
$(1-\alpha)^2(1+2\alpha)$	autres	≤ 9	≤ 100	≤ 100	≤ 209

Puisque $\alpha > 0.99990$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Delta F(c^t, i) + \Delta F(c^t, i+1) + \Delta F(c^t, i+2)] &\leq -17\alpha^3 - \alpha^2(1-\alpha) + 209(1-\alpha)^2(1+2\alpha) \\ &\leq -16. \end{aligned}$$

– masques $\underset{\times\times\times}{1\dot{0}0110011}$, $\underset{\times\times\times}{10\dot{0}110011}$ et $\underset{\times\times\times}{100\dot{1}10011}$ étudiés ensemble :

Avec probabilité	à $t+1$, i correspond à	$\Delta F(c^t, i)$	$\Delta F(c^t, i+1)$	$\Delta F(c^t, i+2)$	total
α^6	$\underset{\uparrow\uparrow\uparrow}{111011101}$	$= -99 + 2(1-\alpha)$	$= 0$	$= 99$	$= 2(1-\alpha)$
$\alpha^5(1-\alpha)$	$\underset{\uparrow\uparrow}{101011101}$	≤ 1	$= 0$	$= 99$	≤ 100
$\alpha^5(1-\alpha)$	$\underset{\uparrow\uparrow}{111111101}$	≤ -98	$= 0$	$= 0$	≤ -98
$\alpha^5(1-\alpha)$	$\underset{\uparrow\uparrow}{110011101}$	≤ -98	$= 91$	$= 0$	≤ -7
$\alpha^5(1-\alpha)$	$\underset{\uparrow\uparrow}{111010101}$	≤ -98	$= 0$	$= 99$	≤ 1
$\alpha^5(1-\alpha)$	$\underset{\uparrow\uparrow}{111011111}$	≤ -98	$= 0$	$= 100$	≤ 2
$\alpha^5(1-\alpha)$	$\underset{\uparrow\uparrow}{11101\ 1001}$	≤ -98	$= 0$	$= 91$	≤ -7
$(1-\alpha)^2k$	autres	≤ 2	≤ 100	≤ 100	≤ 202

Nous posons $k = (1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + 5\alpha^4)$. La dernière ligne correspond aux cas où plus de deux cellules ne se mettent pas à jour. Puisque $\alpha > 0.99990$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Delta F(c^t, i) + \Delta F(c^t, i+1) + \Delta F(c^t, i+2)] &\leq +2\alpha^6(1-\alpha) - 9\alpha^5(1-\alpha) + 202(1-\alpha)^2(1+2\alpha+3\alpha^2+4\alpha^3+5\alpha^4) \\ &\leq -5(1-\alpha). \end{aligned}$$

– masques $\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{0}\overset{\cdot}{0}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{0}\overset{\cdot}{0}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{0}$, $\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{0}\overset{\cdot}{0}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{0}\overset{\cdot}{0}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{0}$ et $\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{0}\overset{\cdot}{0}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{0}\overset{\cdot}{0}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{0}$ étudiés ensemble :

Avec probabilité	à $t+1$, i correspond à	et $\Delta F(c^t, i)$	et $\Delta F(c^t, i+1)$	et $\Delta F(c^t, i+2)$	total
α^3	$\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{0}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{?}\overset{\cdot}{?}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{?}$ ↑↑↑	≤ -98	$= 0$	≤ 100	≤ 2
$\alpha^2(1-\alpha)$	$\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{0}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{0}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{?}\overset{\cdot}{?}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{?}$ ↑↑	≤ 1	$= 0$	≤ 100	≤ 101
$\alpha^2(1-\alpha)$	$\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{?}\overset{\cdot}{?}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{?}$ ↑↑	≤ -98	$= 0$	$= 0$	≤ -98
$\alpha^2(1-\alpha)$	$\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{0}\overset{\cdot}{0}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{?}\overset{\cdot}{?}\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{?}$ ↑↑	≤ -98	≤ 100	$= 0$	≤ 2
$(1-\alpha)^2(1+2\alpha)$	autres	≤ 2	≤ 100	≤ 100	≤ 202

Puisque $\alpha > 0.99990$, alors

$$\mathbb{E}[\Delta F(c^t, i) + \Delta F(c^t, i+1) + \Delta F(c^t, i+2)] \leq 2\alpha^3 + 5\alpha^2(1-\alpha) + 202(1-\alpha)^2(1+2\alpha) \leq 3.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] &\leq +9|c^t|_{10110010} + 3|c^t|_{100110010} + |c^t|_{1010010} \\ &\quad - (2|c^t|_{101101} + 0.8(1-\alpha)|c^t|_{10110011} + 5(1-\alpha)|c^t|_{1010011}) \\ &\quad - 50|c^t|_{10010} \\ &\quad - (99(|c^t|_{1000} + 0.3(1-\alpha)|c^t|_{1001111} + 0.8(1-\alpha)|c^t|_{100111011} + 16|c^t|_{100111010} \\ &\quad \quad + 0.3(1-\alpha)|c^t|_{1001101} + 5(1-\alpha)|c^t|_{100110011} + 0.3(1-\alpha)|c^t|_{10011000}) \end{aligned}$$

Remarquons que les trois mots dont l'occurrence est pondérée positivement ($|c^t|_{10110010}$, $|c^t|_{100110010}$ et $|c^t|_{1010010}$, situés dans la première ligne) admettent tous le sous-mot 10010. Et donc,

$$9|c^t|_{10110010} + 3|c^t|_{100110010} + |c^t|_{1010010} - 50|c^t|_{10010} \leq -(|c^t|_{100110010} + 36|c^t|_{10010}).$$

En négligeant les trois termes $|c^t|_{101101}$, $|c^t|_{10110011}$ et $|c^t|_{1010011}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] &\leq -(|c^t|_{100110010} + 36|c^t|_{10010} + 99|c^t|_{1000} + 0.3(1-\alpha)|c^t|_{1001111} \\ &\quad + 0.8(1-\alpha)|c^t|_{100111011} + 16|c^t|_{100111010} + 0.3(1-\alpha)|c^t|_{1001101} \\ &\quad + 5(1-\alpha)|c^t|_{100110011} + 0.3(1-\alpha)|c^t|_{10011000}) \\ &\leq -0.3(1-\alpha)(|c^t|_{100110010} + |c^t|_{10010} + |c^t|_{1000} + |c^t|_{1001111} + |c^t|_{100111011} \\ &\quad + |c^t|_{100111010} + |c^t|_{1001101} + |c^t|_{100110011} + |c^t|_{10011000}) \end{aligned}$$

Remarquons que tous les mots apparaissant dans ce terme sont les mots apparaissant dans les feuilles du sous-arbre de la figure 4.4 issu du noeud étiqueté par 100. Et donc :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\Delta F(c^t, i)] \leq -0.3(1-\alpha)|c^t|_{100}.$$

Tant que c^t n'est pas stable ou qu'il existe un motif autre que des 0 isolés :

$$\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] \leq -0.3(1-\alpha)|c^t|_{100} \leq -0.3(1-\alpha).$$

Si c^t est une configuration où tous les 0 sont isolés $\mathbb{E}[\Delta F(c^t)] \leq 0$. \square

Théorème 4.2 *En dynamique α -asynchrone, l'automate **BCF** converge presque sûrement vers une configuration stable à partir de n'importe quelle configuration initiale. Son temps de relaxation est $O(\frac{n}{1-\alpha})$.*

Preuve. Sur les configurations instables où tous les 0 sont isolés, l'espérance de la variation de la fonction potentielle est nulle; mais mettre à jour une cellule active crée un motif 00 et l'espérance de la variation de la fonction potentielle devient strictement négative. C'est pourquoi, nous allons considérer la séquence $(x^t)_{t \geq 0}$ où $x^t = c^{2t}$. Si x^t est constituée de 0 isolés, alors soit la configuration est $(01)^{n/2}$ et la dynamique a convergé, soit mettre à jour n'importe quelle cellule active crée un motif 00. Ainsi par le lemme 4.1, tant que x^t n'est pas stable, on a $\mathbb{E}[\Delta F(x^t)] \leq 0.3\alpha(1 - \alpha)$. Par le lemme 1.45, l'automate cellulaire **BCF** converge presque sûrement vers une configuration stable depuis n'importe quelle configuration initiale quand $\alpha > 0.99990$. Leur temps de relaxation est $O(\frac{n}{1-\alpha})$. \square

4.3 Conclusion

Nous avons obtenu ici un premier résultat sur l'automate **BCF**. Même si l'intervalle de valeurs pour lequel nous savons comprendre son comportement est petit, cette avancée met en avant un comportement propre à la dynamique α -asynchrone puisque cet automate diverge pour les autres dynamiques. Également les phénomènes isolés dans le chapitre précédent faisaient intervenir seulement deux ou trois cellules voisines. Ici, le phénomène de collision montre qu'analyser des interactions entre différentes régions de l'automate nécessite de considérer de larges motifs. À cause de la complexité des calculs, nous nous sommes contentés de considérer des régions proches l'une de l'autre. La méthode que nous avons développée dans le chapitre précédent nous a permis de gérer les énumérations et de certifier que nous n'avons pas oublié de cas. Mais il ne fait nul doute que prendre en compte les effets de la collision entre des régions plus éloignées dans la configuration permettrait d'obtenir une meilleure borne. Analyser localement des marches aléatoires en assignant des poids aux cellules s'est révélé simple, mais ces interactions sont bien plus complexes à analyser.

Chapitre 5

Le cas d'une transition de phase : l'automate cellulaire BCDEFG(178)

Ce chapitre est consacré à l'étude de la transition de phase, en fonction du taux d'asynchronisme, de l'automate **BCDEFG** sous la dynamique α -asynchrone [78]. Nous allons utiliser une technique différente ne reposant pas sur l'analyse d'une fonction de poids via les bases de masques. Nous allons faire un couplage avec un modèle de percolation dirigée pour prouver une corrélation entre la valeur critique p_c de la percolation dirigée et la valeur critique α_c de la transition de phase de l'automate **BCDEFG**. Cette technique s'est déjà avérée efficace pour étudier des systèmes de particules en interaction (voir par exemple [56]). Nous prouvons ainsi que si $\alpha > 0.996$ alors il existe une probabilité non nulle que l'automate cellulaire **BCDEFG** diverge à partir d'une configuration initiale infinie ne contenant qu'une seule cellule noire, c'est-à-dire ayant une seule cellule différente de la configuration stable infinie tout-blanc. Ainsi, nous apportons ici un premier résultat sur l'automate cellulaire **BCDEFG** qui permet de confirmer une partie de nos observations. De plus, notre raisonnement montre formellement le lien avec la percolation dirigée, déjà conjecturé dans les travaux de Fatès [25]. Ceci laisse supposer un comportement complexe, la théorie de la percolation dirigée n'étant encore que très partiellement maîtrisée. Nous n'avons pas encore de borne inférieure, ce qui ne nous permet pas encore de prouver formellement l'existence d'une transition de phase. Tout résultat dans cette direction serait une avancée importante (et sûrement très délicate), d'autant plus qu'à notre grande surprise, nous rencontrerons de nouveau cet automate cellulaire dans l'étude de la dimension 2. Comme nous le verrons par la suite dans le chapitre 7, des résultats sur le temps de relaxation de cet automate quand α est proche de 0 permettraient sûrement d'en obtenir d'autres sur les phénomènes que nous étudions en dimension 2.

Dans un premier temps, nous adaptons certaines notations pour étudier des configurations infinies. Ensuite, nous présentons en détails nos observations sur le comportement de l'automate **BCDEFG**. Puis, nous introduisons le modèle de percolation dirigée que nous utilisons. Enfin nous prouvons notre résultat en explicitant notre couplage entre la percolation dirigée et l'automate **BCDEFG**.

5.1 Définitions

Définition 5.1 (Probabilité de convergence) *Étant donnée une configuration initiale 1D infinie c^0 , la probabilité de convergence à partir de la configuration c^0 , notée $P_\alpha(c^0)$, est la probabilité que la trajectoire $(c^t)_{t \geq 0}$ évoluant sous la règle **BCDEFG** en dynamique α -asynchrone converge vers une configuration stable à partir de la configuration initiale c^0 , i.e. $P\{T < \infty\}$*

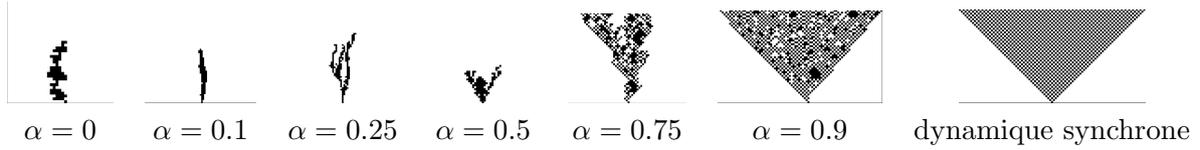


FIG. 5.1 – L’automate **BCDEFG** sous différentes dynamiques à partir de la configuration initiale c^{init} .

où $T = \min\{t : c^t \text{ est stable}\}$.

La règle de transition de l’automate **BCDEFG** se traduit par le fait qu’une cellule est active si et seulement si au moins une de ses voisines est dans un état différent du sien. Donc, les seules configurations stables de cet automate sont les configurations tout-blanc et tout-noir. Comme, toute cellule a une probabilité strictement positive de rester dans son état en dynamique α -asynchrone pour $0 < \alpha < 1$, la probabilité $P_\alpha(c^0)$ ne peut être positive que si initialement un ensemble fini de cellules de c^0 sont dans l’état 0 ou un ensemble fini de cellules de c^0 sont dans l’état 1. Dans cette section, nous allons considérer une configuration initiale particulière qui est ”proche” de la configuration stable toute blanche.

Définition 5.2 (Configuration initiale) La configuration c^{init} est définie comme $c_0^{init} = 1$ et tout $i \in \mathbb{Z}^*$, $c_i^{init} = 0$.

A partir de maintenant, nous considérons toujours que la configuration initiale est c^{init} . Donc, pour tout temps t , il y a au plus $2t + 1$ cellules dans l’état 1 qui se trouvent forcément parmi les cellules $\{-t, \dots, 0, \dots, t\}$. S’il existe au moins une cellule dans l’état 1 au temps t , il existe au moins une cellule active. Seule la cellule numéro 0 diffère entre la configuration c^{init} et la configuration stable toute blanche. Néanmoins nous avons obtenu le résultat suivant que nous démontrons ci-après :

Théorème 5.3 Si $\alpha \geq \sqrt[3]{80/81} \approx 0.996$ alors $P_\alpha(c^{init}) < 1$.

5.2 Discussion

Dans la section 3.5, nous conjecturons que l’automate **BCDEFG** admet une transition de phase pour $\alpha = \alpha_c \approx 0.66$. La figure 5.1, présente l’évolution du diagramme espace-temps de l’automate **BCDEFG** quand α varie depuis la même configuration initiale c^{init} . La dynamique totalement asynchrone peut être adaptée sur les configurations infinies si la configuration initiale est c^0 : il suffit de mettre à jour une cellule choisie uniformément parmi les cellules actives. Pour une telle dynamique, une 1-région de taille ≥ 2 se comporte comme une marche aléatoire non biaisée 1D. Une telle marche aléatoire est récurrente [10]. Donc, l’automate **BCDEFG** converge presque sûrement vers tout-blanc depuis la configuration initiale c^{init} en dynamique totalement asynchrone. Par contre l’automate cellulaire diverge en dynamique synchrone même quand la configuration initiale est c^{init} . Expérimentalement nous avons constaté que le temps de relaxation est polynomiale quand $\alpha < \alpha_c$ et exponentielle quand $\alpha > \alpha_c$. Ainsi il semble que le comportement de l’automate passe brutalement de son comportement totalement asynchrone à son comportement synchrone quand α varie de 0 à 1.

Quand $0 < \alpha < \alpha_c$, quelques ”erreurs” peuvent apparaître mais le comportement global semble être le même que le comportement totalement asynchrone. Ces erreurs sont souvent des fragmentations de régions qui sont généralement rapidement résorbées car la nouvelle région apparaît à distance 1 de l’ancienne et les deux régions fusionnent rapidement. Par contre

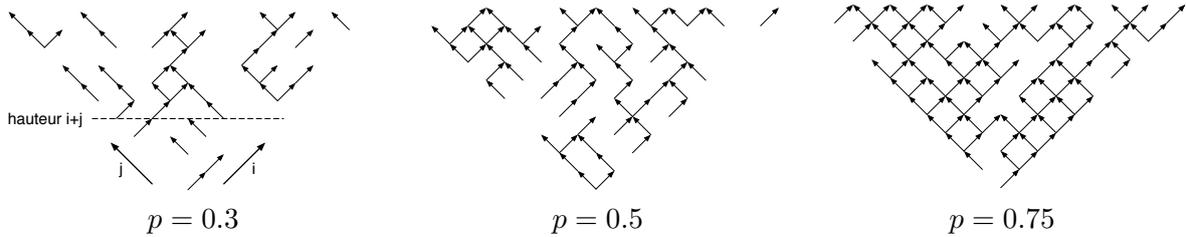


FIG. 5.2 – La percolation dirigée pour différentes valeurs de p .

pour $\alpha > \alpha_c$, le comportement change radicalement : un motif 10101010 clignotant (toutes les cellules sont actives) apparaît et s'étend rapidement au détriment des grandes 0-régions et 1-régions. Ce motif semble empêcher de converger vers une configuration stable. Les cellules à l'intérieur des grandes 0- et 1-régions sont inactives tandis que les cellules à l'intérieur des régions de 10101010 sont toutes actives. Ce motif est donc instable et marginal quand α est proche de 0. Malheureusement, l'étude du temps de relaxation en dynamique totalement asynchrone s'appuie sur une parfaite symétrie de comportement entre les 0-régions et les 1-régions. La présence d'un troisième type de région, aussi marginale soit elle, nous empêche d'obtenir une borne inférieure à partir du raisonnement fait en dynamique totalement asynchrone (voir les travaux de Fatès *et al* [27]) qui ne dépende pas de la taille de la configuration. Nous pensons qu'obtenir une borne inférieure sur α_c serait une grande avancée.

Nous allons maintenant prouver que quand $\alpha > 0.996$, il existe une probabilité strictement positive que le processus n'atteigne pas une configuration stable à partir de la configuration initiale c^{init} . Nos résultats confirment l'intuition que les 0- et 1-régions disparaissent au profit du motif 0101 et que le comportement de **BCDEFG** est bien plus complexe que celui d'une marche aléatoire.

5.3 Le modèle de percolation dirigée

Définition 5.4 (Percolation dirigée) Soit une probabilité p , considérons le graphe $\mathbb{L}(p) = (\mathbb{Z}_+^2, \mathbb{E})$ où \mathbb{Z}_+^2 est l'ensemble des sites et \mathbb{E} l'ensemble des liens. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z}_+^2$, il existe un arc du site (i, j) vers les sites $(i + 1, j)$ et $(i, j + 1)$. Les arcs de ce graphe sont étiquetés de façon aléatoire : chaque lien a indépendamment des autres une probabilité p d'être étiqueté ouvert et une probabilité $1 - p$ d'être étiqueté fermé.

La figure 5.2 présente différents graphes de percolation dirigée pour différentes valeurs de p . Seuls les liens ouverts sont dessinés. En théorie de la percolation, la principale question est de déterminer la taille des amas (ensembles de sites reliés par des liens ouverts).

Définition 5.5 (Amas) Considérons une probabilité p et le graphe aléatoire $\mathbb{L}(p)$. On note C l'amas centré sur le site $(0, 0)$: un site (i, j) est dans C si et seulement s'il existe un chemin orienté du site $(0, 0)$ vers le site (i, j) constitué uniquement de liens ouverts. Nous désignons par $\theta(p)$ la probabilité que l'ensemble C soit infini (i.e. qu'il existe un chemin infini partant de la cellule $(0, 0)$).

Par la suite quand nous parlerons d'amas, il s'agira toujours de l'amas centré en $(0, 0)$. Il est facile de montrer que $\theta(p)$ est une fonction croissante de p . De plus, il existe une valeur critique p_c , tel que $\theta(p) > 0$ pour tout $p > p_c$ et $\theta(p) < 0$ pour tout $p < p_c$. La valeur exacte de p_c n'est pas encore connue dans le cas de la percolation dirigée, mais des bornes sur cette valeur peuvent être trouvées dans le livre de Grimmett [40] :

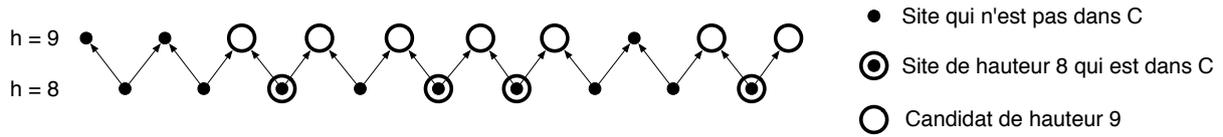


FIG. 5.3 – Un exemple de sites et de candidats de hauteurs 8 et 9. Tous les liens (ouverts ou fermés) sont dessinés.

Théorème 5.6 (Valeur critique [40]) *il existe une valeur critique p_c tel que si $p < p_c$ alors $\theta(p) = 0$, et si $p > p_c$ alors $\theta(p) > 0$. De plus, $0.6298 < p_c < 2/3$.*

5.4 Couplage avec la percolation dirigée

Il n'existe pas de notion de temps dans la percolation. Mais la hauteur (*i.e.* la distance qui sépare un site de l'origine) va remplacer cette notion dans notre couplage. En effet, pour déterminer la probabilité qu'un site de hauteur $t + 1$ soit dans l'amas, il suffit de savoir quels sites de hauteur t sont dans l'amas ; de la même façon, dans un automate cellulaire, il suffit seulement de connaître l'état des cellules au temps t pour déterminer la probabilité qu'une cellule soit dans l'état 1 au temps $t + 1$.

Définition 5.7 (Hauteur) *La hauteur du site (i, j) est $i + j$, c'est-à-dire la longueur des chemins du site $(0, 0)$ au site (i, j) . La hauteur d'un lien est la hauteur de son origine. L'ensemble \mathbb{S}^t désigne les sites de hauteur t et l'ensemble C^t désigne les sites de hauteur t qui sont dans l'amas.*

Définition 5.8 (Candidat) *Un site de hauteur $t + 1$ est candidat si et seulement si au moins un de ses prédécesseurs est dans C^t . L'ensemble \hat{C}^{t+1} désigne l'ensemble des candidats au temps $t + 1$.*

Clairement pour tout $t > 0$, $C^t \subset \hat{C}^t$. La figure 5.3 illustre la notion de hauteur et de candidat.

Définition 5.9 (Projection) *Pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{U}^t \subset \mathbb{Z}$ désigne un sous-ensemble de cellules d'abscisse de même parité que t , c'est-à-dire $i \in \mathbb{U}^t$ si et seulement si $-t \leq i \leq t$ et $i \equiv t \pmod{2}$. Pour tout $t \geq 0$, soit $g_t : \mathbb{S}^t \rightarrow \mathbb{U}^t$ la bijection qui pour tout $i, j \in \mathbb{N}$ tel que $i + j = t$ associe au site (i, j) la cellule $2i - \lceil \frac{i+j}{2} \rceil$.*

Les sites de hauteur t de $\mathbb{L}(p)$ se projettent par g_t sur les cellules de \mathbb{U}^t . Le diagramme espace-temps de la figure 5.4 illustre la projection où les sites de hauteur t sont projetés sur les cellules de \mathbb{U}^t au temps t . Notre but est de définir un couplage tel que les cellules au temps t correspondant aux sites de hauteur t dans C , soient toujours actives. Le critère suivant exprime cette propriété.

Définition 5.10 (Critère de correspondance) *Nous disons qu'une trajectoire $(c^t)_{t>0}$ et un graphe orienté étiqueté aléatoirement $\mathbb{L}(p)$ satisfont le critère de correspondance au temps t si et seulement si toutes les cellules de $g_t(C^t)$ sont actives au temps t . Et, ils satisfont le critère de correspondance si et seulement s'ils satisfont le critère de correspondance pour tout $t \geq 0$.*

Comme la cellule numéro 0 est active au temps 0, le critère de correspondance est toujours vrai au temps 0. Si le critère de correspondance est vrai et que l'amas est infini alors, pour

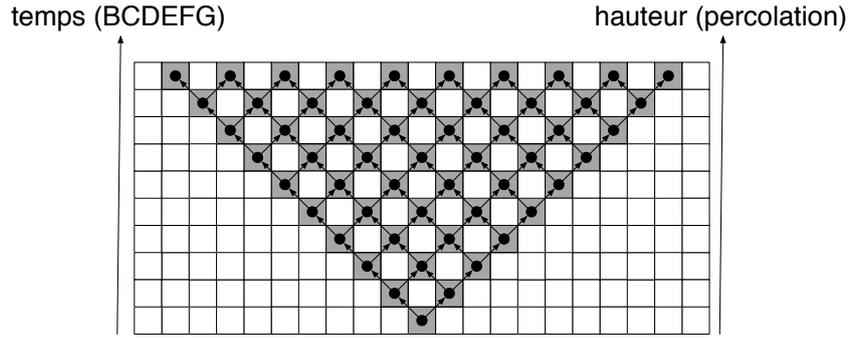


FIG. 5.4 – Projection du graphe $\mathbb{L}(p)$ sur le diagramme espace-temps de l'automate cellulaire BCDEFG. Pour chaque t , les cellules de c^t appartenant à \mathbb{U}^t sont coloriées en noir.

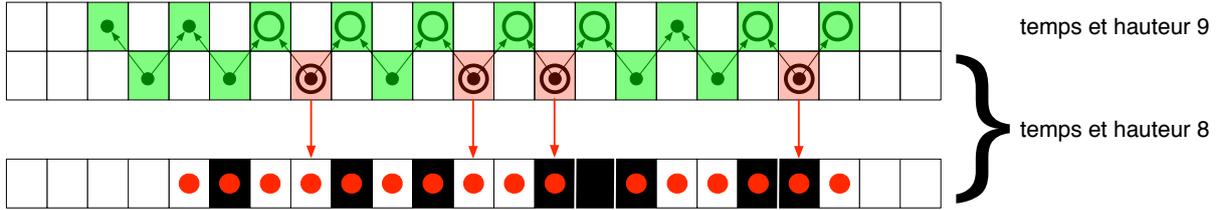


FIG. 5.5 – Les cellules de c^8 qui sont dans \mathbb{U}^8 et les cellules de c^9 qui sont dans \mathbb{U}^9 sont coloriées en rouge et vert. Les cellules actives sont marquées par un point rouge. Les flèches rouges relient les sites de C^8 à leur cellule correspondante de c^8 . Dans cet exemple toutes ces cellules sont actives donc le critère de correspondance est vrai au temps 8.

tout $t \geq 0$, c^t admet au moins une cellule active et donc la trajectoire (c^t) ne converge pas. La figure 5.5 illustre une configuration qui satisfait le critère de correspondance au temps 8 avec le graphe de l'exemple 5.4.

Considérons une configuration c^t telle que le critère de correspondance est vrai au temps t . Nous cherchons à définir un couplage tel que le critère de correspondance reste vrai au temps $t+1$. Seuls les sites de hauteur $t+1$ de \hat{C}^{t+1} peuvent être dans C . Si un tel site est effectivement dans C , alors la cellule i correspondant à ce site doit être active au temps $t+1$. Notre couplage doit être conçu pour vérifier cette propriété. Une telle cellule est appelée une cellule contrainte.

Définition 5.11 (Cellule contrainte) Une cellule i est contrainte au temps t si et seulement si $i \in \mathbb{U}^{t+1}$ et $g_{t+1}^{-1}(i)$ est dans \hat{C}^{t+1} (la cellule i est candidate au temps $t+1$).

Nous devons trouver un moyen pour forcer une cellule contrainte au temps t à devenir active au temps $t+1$. Cela est possible car une cellule contrainte a toujours une voisine active au temps t quand le critère de correspondance est vérifié (lemme 5.12). Il est ainsi possible d'associer à chaque cellule contrainte une partenaire qui est une cellule voisine active (définition 5.13). Mettre à jour simultanément ces deux cellules au temps t force la cellule contrainte à être active au temps $t+1$ (lemme 5.14), nous pourrions alors coupler cet événement avec l'étiquetage des liens (théorème 5.15).

Lemme 5.12 Si $(c^t)_{t \geq 0}$ et $\mathbb{L}(p)$ vérifient le critère de correspondance au temps t , alors chaque cellule contrainte au temps t possède au moins une cellule active dans son voisinage.

Preuve. Supposons que la cellule i soit contrainte au temps t . Alors le site $(k, l) = g_{t+1}^{-1}(i)$ est dans \hat{C}^{t+1} . Donc au moins un des deux sites $(k, l-1)$ ou $(k-1, l)$ est dans C^t . Comme le

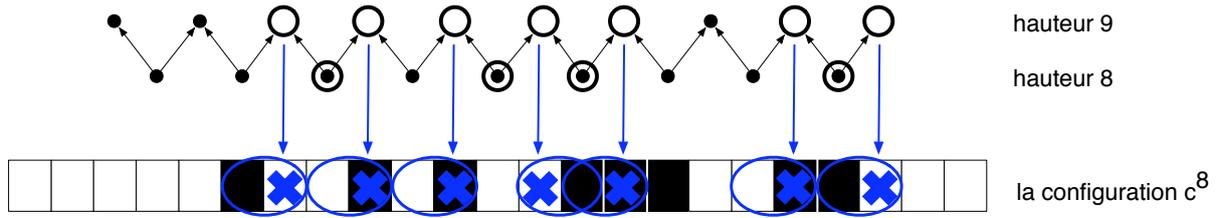


FIG. 5.6 – Les flèches bleues relient les sites de \hat{C}^9 aux cellules à qui elles imposent une contrainte. Ces cellules contraintes sont marquées par une croix bleue. Les cercles regroupent les cellules contraintes avec leur partenaire.

critère de correspondance est vrai au temps t , au moins une des deux cellules $g(k, l - 1) = i + 1$ et $g(k - 1, l) = i - 1$ est active au temps t . \square

Définition 5.13 (Partenaire) La partenaire d'une cellule contrainte i au temps t est définie de la façon suivante :

- Si i correspond au temps t à l'un des masques $0\dot{1}$, $1\dot{0}$, $10\dot{0}$ ou $01\dot{1}$, alors sa partenaire au temps t est la cellule $i - 1$.
- Si i correspond au temps t à l'un des masques $1\dot{1}0$, $0\dot{0}1$, $00\dot{0}01$ ou $11\dot{1}10$, alors sa partenaire au temps t est la cellule $i + 1$.

La figure 5.6 représente les cellules contraintes de la figure 5.5 et leur partenaire. Comme pour tout $t \geq 0$, deux cellules de \mathbb{U}^t ne peuvent pas être voisines, deux cellules contraintes ne peuvent pas être voisines. De plus comme les partenaires sont toutes voisines d'une cellule contrainte, une cellule ne peut être à la fois contrainte et partenaire d'une autre cellule. Par contre, une cellule peut être la partenaire de deux cellules contraintes au temps t .

Lemme 5.14 Pour tout $t > 0$, si $(c^t)_{t \geq 0}$ et $\mathbb{L}(p)$ vérifient le critère de correspondance au temps t , chaque cellule contrainte au temps t reçoit une partenaire et si ces deux cellules se mettent à jour au temps t alors la cellule contrainte est active au temps $t + 1$.

Preuve. Supposons que la cellule i soit contrainte au temps t . Alors sans perdre de généralité, nous supposons que $c_i^t = 1$ (l'autre cas est symétrique). Nous procédons à une énumération de cas sur les états de ses voisines et montrons que dans tous les cas, si i et sa partenaire se mettent à jour au temps t alors i est active au temps $t + 1$. Cette étude de cas est faite dans la figure 5.7. \square

Théorème 5.15 Si $\alpha \geq \sqrt[3]{1 - (1 - p_c)^4}$ alors $P_\alpha(c^{init}) < 1$, où p_c est défini au théorème 5.6.

Preuve. Considérons une trajectoire $(c^t)_{t \geq 0}$ dont l'évolution est régie par la règle **BCDEFG** sous la dynamique α -asynchrone et où $c^0 = c^{init}$, ainsi qu'un graphe étiqueté aléatoirement $\mathbb{L}(p)$. Supposons $\alpha \geq \sqrt[3]{1 - (1 - p)^4}$. Nous allons définir un couplage entre ces deux processus.

Le couplage est défini récursivement pour tout t entre les cellules de c^t et les liens de $\mathbb{L}(p)$ de hauteur t . Nous expliquons maintenant comment se déroule le couplage pour $t \geq 0$. Supposons que le critère de correspondance est vrai au temps t .

- Nous déterminons la façon dont sont étiquetés les liens de hauteur t de sorte que chaque lien soit ouvert avec probabilité p indépendamment de l'étiquetage des autres liens.
- Nous déterminons la façon dont se mettent à jour les cellules au temps t de sorte que chaque cellule se mette à jour avec probabilité α indépendamment des autres cellules.

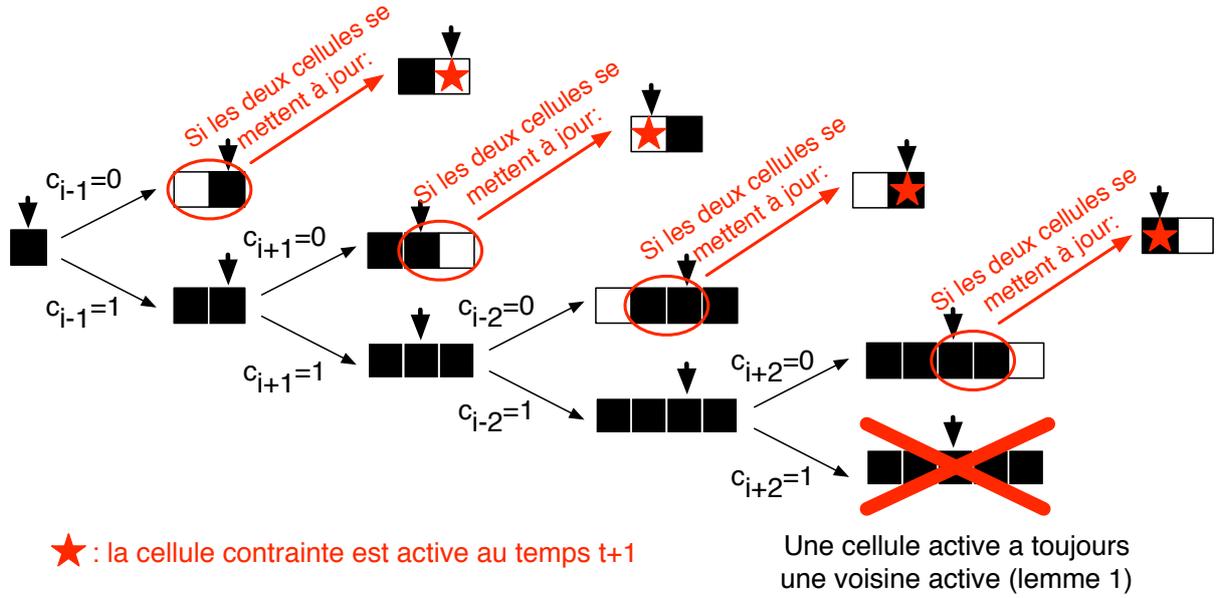


FIG. 5.7 – preuve du lemme 5.14.

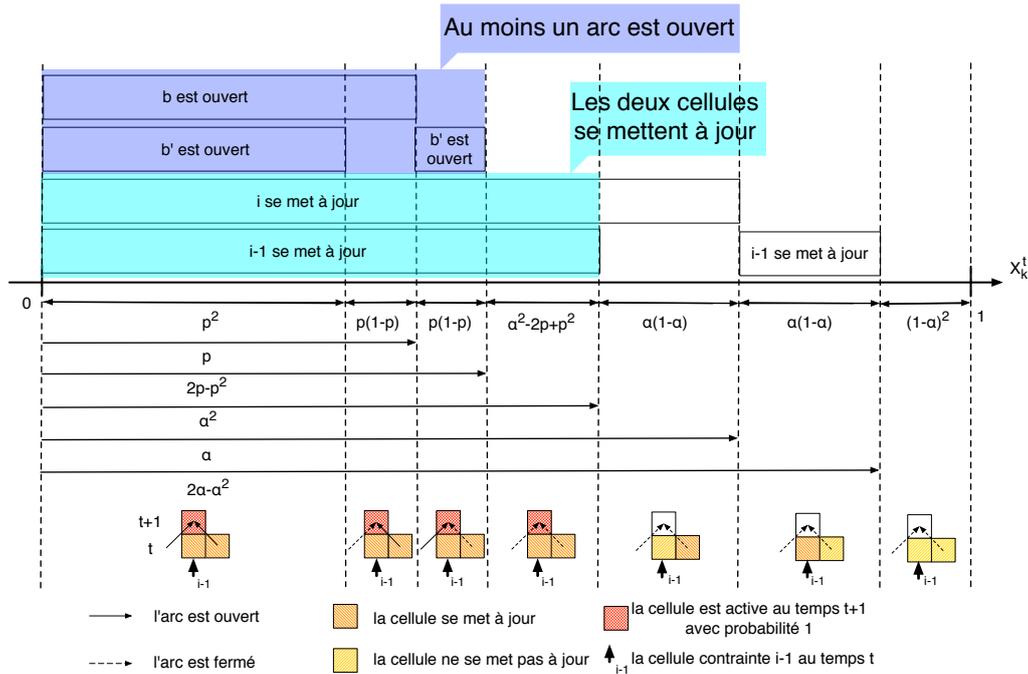
- Notre couplage est défini de telle façon que si au moins un des deux arcs entrant dans un site de \hat{C}^{t+1} est ouvert alors la cellule correspondante i est active au temps $t + 1$. Pour cela, nous utilisons le lemme 5.14. Comme le critère de correspondance est vrai au temps t , nous pouvons forcer la cellule i et sa partenaire à se mettre à jour. Comme le critère de correspondance est vrai au temps 0, il restera récursivement vrai pour tout t .

L'étiquetage et la mise à jour des cellules sont faits de la manière suivante : nous répartissons les cellules et les liens de hauteur t dans des paniers de types différents :

- type 1 : une unique cellule c_i^t qui n'est ni contrainte ni la partenaire d'une autre cellule.
- type 2 : un unique arc b de hauteur t qui ne pointe pas vers un site candidat de \hat{C}^{t+1} .
- type 3 : deux cellules i et $i + \epsilon$ avec $\epsilon \in \{-1, 1\}$ et les deux arcs de hauteur t pointant vers le site correspondant à la cellule $i + \epsilon$ au temps $t + 1$, lorsque $i + \epsilon$ est contrainte et que i est la partenaire au temps t de $i + \epsilon$ et elle seulement.
- type 4 : trois cellules $i - 1$, i et $i + 1$ et les arcs qui pointent vers les sites correspondant aux cellules $i - 1$ et $i + 1$ au temps $t + 1$, lorsque $i - 1$ et $i + 1$ sont contraintes et que i est la partenaire au temps t des deux cellules $i - 1$ et $i + 1$.

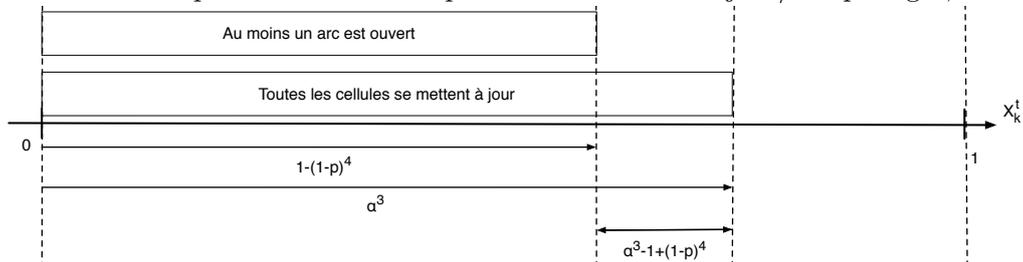
Il est facilement vérifiable que chaque lien de hauteur t et chaque cellule appartiennent exactement à un panier. Nous assignons à chaque panier k une variable aléatoire indépendante X_k^t uniformément distribuée sur $[0, 1]$. Maintenant nous définissons le couplage dans chaque panier.

- type 1 : si $X_k^t < \alpha$ alors i se met à jour et si $X_k^t \leq \alpha$ alors i ne se met pas à jour.
- type 2 : si $X_k^t < p$ alors b est ouvert et si $X_k^t \leq p$ alors b est fermé.
- type 3 : les liens sont ouverts et les cellules se mettent à jour suivant ce diagramme :



Chaque lien est ouvert avec probabilité p . Les liens b et b' sont tous les deux ouverts avec probabilité p^2 , b est ouvert et b' fermé avec probabilité $p(1-p)$ et b est fermé et b' ouvert avec probabilité $p(1-p)$. Donc chaque lien est ouvert indépendamment de l'autre. La même chose est vraie pour les cellules. Comme $\alpha \geq \sqrt[3]{1 - (1-p)^4}$, alors $\alpha^2 - 2p + p^2 > 0$ et la probabilité qu'au moins un lien soit ouvert est bien inférieure à la probabilité que les deux cellules se mettent à jour. Le couplage est correctement défini.

- type 4 : Comme dans le cas précédent, nous définissons un couplage qui respecte les distributions de probabilité et l'indépendance des mises à jour/ étiquetages, ainsi :



La probabilité que toutes les cellules se mettent à jour est α^3 et la probabilité qu'au moins un lien soit ouvert est $1 - (1-p)^4$. Comme $\alpha \geq \sqrt[3]{1 - (1-p)^4}$, les trois cellules se mettent toujours à jour si au moins un des liens est ouvert.

Ainsi, dès qu'un arc entrant dans un site de \hat{C}^{t+1} est ouvert, la cellule correspondante au temps $t+1$ est active. Donc le critère de correspondance est vrai au temps $t+1$. Comme le critère de correspondance est vrai au temps 0, il restera récursivement vrai pour tout t . Si $p > p_c$ alors $\theta(p) > 0$ ce qui signifie qu'avec une probabilité strictement positive, il existe pour tout t un site de hauteur t qui est dans l'amas. Donc, il existe, avec une probabilité strictement positive, une cellule active au temps $t \geq 0$. Donc si $\alpha \geq \sqrt[3]{1 - (1-p_c)^4}$ alors $P_\alpha(c^{init}) < 1$. \square

Les théorèmes 5.15 et 5.6 prouvent le théorème 5.3.

5.5 Conclusion

Ce couplage entre l'automate **BCDEFG** et la percolation dirigée nous a permis d'obtenir une première borne sur α_c . Transcrire directement les preuves de percolation sur le diagramme espace-temps de **BCDEFG** sans passer par un couplage pourrait certainement améliorer cette borne. Mais comme d'autres phénomènes apparaissent quand α décroît, nous pensons que cette amélioration serait minimale. Par contre, nous pensons que cette méthode s'applique aussi à l'automate **BCEFG**(146) car ces deux automates sont très semblables.

En ce qui concerne la borne inférieure sur α_c , nous pensons malheureusement que cette technique ne peut pas permettre d'en obtenir une car supprimer certains motifs (les grandes régions noires) demande forcément un certain temps à **BCDEFG** tandis qu'un graphe de percolation peut supprimer, avec une probabilité infime mais non nulle (toutes les arêtes d'une hauteur donnée sont fermées), des motifs gênants en un seul niveau de hauteur. Donc la probabilité que la percolation converge en un niveau de hauteur est strictement supérieure, pour la plupart des configurations, à la probabilité que l'automate converge en un pas de temps. Ceci nous empêche de définir un couplage pour obtenir une borne inférieure.

Notons enfin qu'une variante de la technique présentée ici a été développée indépendamment par Mossel et Roch [64] pour résoudre une conjecture sur l'espérance du temps d'émergence de la coopération dans le dilemme des prisonniers généralisé aux arbres à degré borné. Cette variante, outre de montrer une autre application de cette technique, laisse supposer que notre résultat devrait être facilement transposable aux configurations toriques pour prouver un temps de relaxation exponentiel quand $\alpha > 0.996$.

Deuxième partie

**Automates cellulaires asynchrones
en dimension 2**

Chapitre 6

Introduction

6.1 La dimension 2

Dans cette partie nous allons étudier les automates cellulaires en dimension 2. En dimension 1, la classe des automates cellulaires élémentaires est à la fois variée, simplement définie, et de taille raisonnable. En dimension 2, la situation est plus compliquée. Déjà, il existe deux types de voisinages fréquemment usités, le voisinage de von Neumann et le voisinage de Moore (voir chapitre 1, page 31). Ainsi, il existe 2^{32} automates cellulaires à deux états avec le voisinage de von Neumann et 2^{512} avec le voisinage de Moore. Nous ne pouvons plus utiliser une approche exhaustive pour l'étude de ces automates. Il existe des résultats antérieurs à nos travaux, liés à l'étude des réseaux de neurones et des réseaux de Hopfield, en dimension 2 sur la dynamique totalement asynchrone, mais il n'en existe aucun sur la dynamique α -asynchrone. Comme nous le verrons, ils ne sont pas assez précis pour décrire les comportements observés, le passage de la dimension 1 à la dimension 2 les compliquant grandement.

6.2 Des motifs liés à l'asynchronisme

Après une phase d'expérimentations, nous avons remarqué que plusieurs automates cellulaires ont en commun en dimension 2 la même réaction face aux dynamiques asynchrones : quand α est en dessous d'un certain seuil, des motifs particuliers apparaissent et s'étendent sur toute la configuration. Le comportement de ces automates change radicalement entre la dynamique α -asynchrone et la dynamique synchrone. Ce phénomène fut pour la première fois constaté sur le jeu de la vie. Expérimentalement, Kaneko et Akutsu [48] et Blok et Bergersen [8] ont constaté que le jeu de la vie fait apparaître des motifs en forme de labyrinthe quand α est proche de 0 (voir figure 6.1) et que ces motifs envahissent la configuration, alors que quand α est proche de 1, le comportement reste proche de celui en dynamique synchrone : des particules se déplacent sur la configuration.

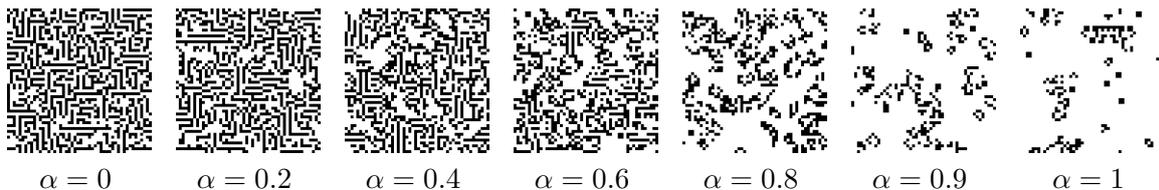


FIG. 6.1 – Le jeu de la vie sous différentes dynamiques à partir de la même configuration initiale à $t = 150$ ($t = 150 \times 2500$ pour le cas totalement asynchrone).

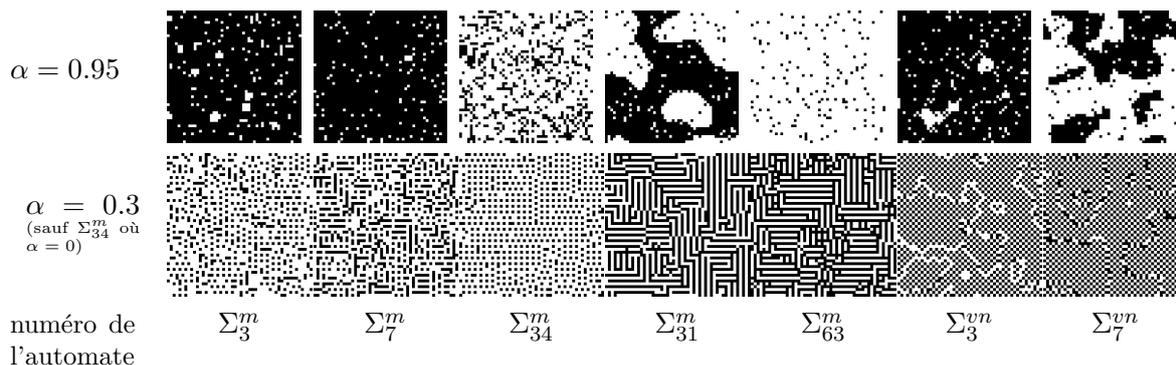


FIG. 6.2 – Différents automates où des motifs persistants (points isolés, hachures, damiers) apparaissent quand α est proche de 0. Configurations atteintes après 50 pas de calculs (voir l’annexe A pour la notation des automates).

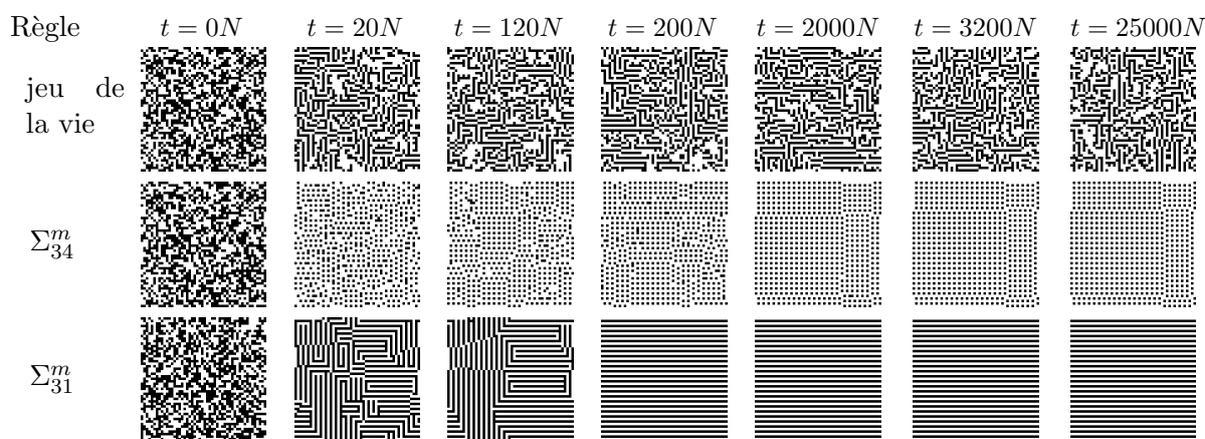


FIG. 6.3 – L’exécution de trois automates cellulaires faisant apparaître des motifs particuliers sous la dynamique totalement asynchrone et convergeant à différentes vitesses (voir l’annexe A pour la notation des automates).

Par la suite, nous nous sommes rendu compte que ce comportement est loin d’être isolé. Selon l’automate et le voisinage considéré, nous avons rencontré différents motifs : damiers, hachures, points isolés (voir figure 6.2). Une fois que ces motifs se sont étendus à toute la configuration, différentes régions semblent se former. L’intérieur des régions est stable mais les zones de contacts entre ces régions évoluent. Pour le jeu de la vie, la taille des régions semble rester petite. Mais dans le cas d’autres automates, les régions grossissent et se stabilisent, entraînant une convergence plus ou moins rapide (voir figure 6.3). Nous avons choisi d’étudier comment se forment ces régions et comment est guidée leur évolution. Nous n’avons donc plus affaire à des marches aléatoires mais à des formes $2D$ aléatoires.

Nous avons cherché expérimentalement plusieurs automates présentant ce type de comportement. Les cas que nous avons recensés appartiennent à la classe des automates cellulaires totalisant externes. Le fait qu’une cellule soit active pour ces automates ne dépend que de la somme des états de ses voisines et de son état (voir l’annexe A pour savoir comment nous désignons un automate de cette classe), comme le jeu de la vie. Notons que nous n’avons principalement exploré expérimentalement que cette classe, et qu’il ne serait donc pas forcément surprenant de rencontrer ce type de comportement pour d’autres classes d’automates. La plupart des automates cellulaires totalisant externes ne présentent pas ce comportement mais il

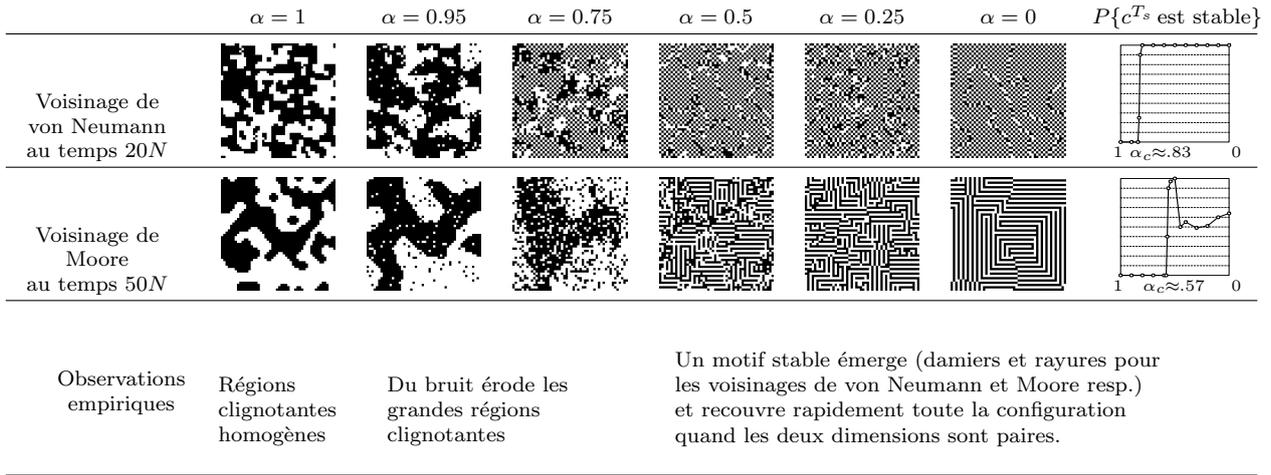


FIG. 6.4 – Minorité 2D sous différentes dynamiques α -asynchrones avec $N_{50} = 50 \times 50$ cellules. La dernière colonne montre, pour $\alpha \in [0, 1]$, la probabilité empirique qu’une configuration initiale aléatoire converge vers une configuration stable avant le temps $T_s \cdot N_{50}$ où $T_s = 1000$ et $T_s = 2000$ pour les voisinages de von Neumann et de Moore respectivement.

n’est néanmoins pas marginal et il s’agit du comportement le plus intéressant que nous avons su repérer. Au final notre attention s’est portée sur un automate présentant ce comportement tout en étant simple à définir : Minorité 2D. Le reste de cette partie est donc consacré à Minorité 2D avec les voisinages de von Neumann (règle numéro Σ_{31}^m) et de Moore (règle numéro Σ_7^m).

6.3 Résultats expérimentaux sur Minorité 2D

Cette section est volontairement informelle car nous présentons des résultats expérimentaux dont la formalisation est déjà un problème non trivial (et non résolu). Les prochains chapitres présentent dans un cadre formel nos progrès sur la compréhension du comportement de cet automate.

Le régime synchrone ($\alpha = 1$) de Minorité 2D a été étudié par Golès [38]. Il a prouvé que la trajectoire converge toujours vers des cycles de longueur 1 ou 2. Expérimentalement, à partir d’une configuration initiale aléatoire, la dynamique converge vers un ensemble de grandes régions clignotantes noires et blanches aux frontières stables.

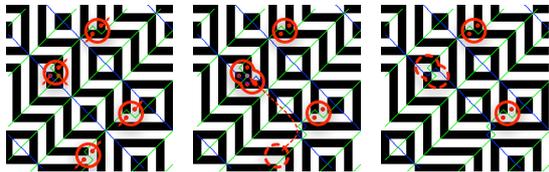
Dès qu’un peu d’asynchronisme est introduit, le comportement change brutalement pour les deux voisinages (voir figure 6.4 et notre site web [45] pour des séquences animées). À cause de l’asynchronisme, à chaque pas de temps certaines cellules choisies aléatoirement ne se mettent pas à jour. Ceci crée du *bruit* qui érode les grandes régions clignotantes qui restaient inchangées en dynamique asynchrone. Au bout d’un certain temps, la dynamique semble converger rapidement vers un fond homogène clignotant perturbé par du bruit aléatoire et elle reste ainsi un temps très long. Après une séquence de mise à jour extrêmement improbable la dynamique converge vers une configuration stable.

Les expériences montrent qu’il existe un seuil α_c , $\alpha_c \approx .83$ et $\alpha_c \approx .57$ pour les voisinages de von Neumann et de Moore respectivement, tel que si $\alpha \leq \alpha_c$, alors des motifs stables apparaissent : *damiers* et *rayures* pour les voisinages de von Neumann et de Moore respectivement. Comme il peut être observé sur notre site [45], au-dessus du seuil, quand $\alpha > \alpha_c$, ces

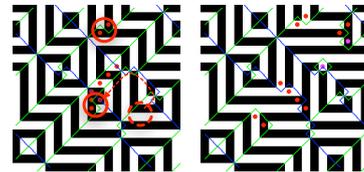
motifs sont instables, mais en dessous et peut-être à α_c , ces motifs sont suffisamment stables pour s'étendre et à long terme recouvrir toute la configuration.

Convergence en dynamique asynchrone. Le dernière colonne de la figure 6.4 montre qu'expérimentalement, quand $\alpha \leq \alpha_c$, la dynamique asynchrone semble converger, au moins avec une probabilité constante, rapidement vers des configurations très particulières pavées par des motifs simples stables pour la dynamique. Au-dessus du seuil, quand $\alpha_c < \alpha < 1$, la dynamique asynchrone semble être expérimentalement bloquée dans des configurations aléatoires d'où aucune structure ne semble émerger.

Le voisinage de Moore fait apparaître des "particules" sur des configurations spécifiques. Une particule est faite de plusieurs cellules actives voisines dans le même état. La figure 6.5 montre une configuration avec des particules. Les points rouges marquent les cellules actives et des frontières sont placées entre deux cellules voisines en diagonale dans le même état. Les particules sont placées d'un côté des frontières et peuvent se déplacer en avant et en arrière le long de ces frontières comme sur un "rail". Quand une particule atteint une intersection entre deux rails, elle peut passer d'un rail à l'autre. Quand deux particules se heurtent, elles disparaissent toutes les deux. Dans des configurations spécifiques, les rails forment une grille et les particules évoluent selon une marche aléatoire $2D$. De plus, les rails sont modifiés par le passage des particules et si deux rails deviennent trop proches, alors toute une partie du réseau de rails s'effondre. Les configurations avec les particules et les rails sont rarement atteintes à partir d'une configuration initiale aléatoire. Néanmoins nous devons en tenir compte quand nous étudions la convergence et ces phénomènes sont durs à analyser mathématiquement. Un tel comportement n'est pas aussi sophistiqué dans le cas de Minorité avec le voisinage de von Neumann (car la structure des rails est trop simple) et n'est pas observé non plus dans le modèle d'Ising ou dans les réseaux d'Hopfield à retour positif.



6.5.a – Une séquence de mises à jour dans une configuration avec 4 particules où deux d'entre elles se déplacent le long des rails et se heurtent.



6.5.b – Une séquence de mises à jour où les rails ne peuvent pas supporter les perturbations dues aux mouvements de particules : à un moment donné, les rails deviennent trop proches, des nouvelles cellules actives apparaissent et une partie du réseau de rails s'effondre.

FIG. 6.5 – Des exemples de comportement complexes de particules dans des configurations de taille 20×20 pour Minorité $2D$ avec le voisinage de Moore.

6.4 Résultats précédents sur Minorité $2D$

Minorité $2D$ est un automate à seuil à retour négatif (son état à une influence négative sur sa stabilité, voir annexe A). Les automates cellulaires à seuil, et donc Minorité, sont un cas particulier des réseaux de neurones et plus particulièrement des réseaux d'Hopfield. Hopfield [44] avait étudié ces réseaux de neurones en régime totalement asynchrone et a introduit une fonction d'énergie décroissante au cours du temps. Cette fonction d'énergie est en fait une

fonction potentielle ; son nom est lié à des considérations issues de la physique statistique. Cette fonction permet de prouver une convergence linéaire dans le cas des réseaux d’Hopfield à *retour positif*. Dans le cas des réseaux d’Hopfield à *retour négatif*, cette fonction n’est pas suffisante pour prouver une convergence rapide mais fournit néanmoins des renseignements puisqu’une configuration de plus haute énergie n’est pas accessible depuis une configuration de plus basse énergie. L’étude des réseaux à retour négatif est réputée beaucoup plus dure que l’étude des réseaux à retour positif et il n’y a quasiment aucun résultat théorique sur ces réseaux.

Notons que la règle de transition de Minorité $2D$ rapproche notre dynamique des modèles des anti-voteurs [56]. Mais à la différence de celui-ci, Minorité $2D$ possède une plus grande variété de configurations stables et certaines de ses transitions entraînent une baisse irréversible de l’énergie. Ceci implique des changements macroscopiques importants que nous étudions dans le chapitre 7.

6.5 Nos résultats sur Minorité $2D$

Nous avons obtenus des résultats similaires sur Minorité $2D$ avec les voisinages de von Neumann [81] et de Moore. Mais, nous ne présenterons pas ici nos travaux sur le voisinage de Moore, ceux-ci étant encore en cours de rédaction (une version préliminaire a été publiée dans [82]).

En adaptant la fonction d’énergie d’Hopfield, nous avons réussi à prouver une baisse initiale rapide de l’énergie qui explique l’apparition des damiers (pour le voisinage de von Neumann) et des hachures (pour le voisinage de Moore). En étudiant les régions de damiers/hachures et en les délimitant par des frontières, nous avons réussi à calculer l’aire occupée par ces régions. Quand une grande région réussit à entourer toutes les petites régions, nous avons prouvé la disparition de ces petites régions et donc démontré la convergence rapide vers une configuration stable. Ce résultat a été obtenu en raffinant la fonction d’énergie, en prenant également en compte l’aire des petites régions. Nous savons donc analyser le début et la fin d’une exécution de Minorité sous la dynamique totalement asynchrone, mais nous ne savons pas encore analyser son milieu.

Nos travaux ont nécessité de déterminer toutes les configurations stables de Minorité. De façon surprenante, cette question n’est pas triviale, pour le voisinage de Moore, car il s’est révélé qu’il existe une grande variété de configurations stables. La structure des configurations stables semble jouer un rôle capital. Surtout les configurations stables d’énergie minimale car les autres configurations stables ne sont que des *patchworks* de ces configurations. En effet, expérimentalement, des régions pavées par des motifs correspondant aux différentes configurations stables luttent entre elles jusqu’à ce que l’une d’entre elles l’emporte et fasse converger la dynamique vers une configuration stable d’énergie minimale ou que les différentes régions se stabilisent pour former une configuration stable de type patchwork. Notons également qu’expérimentalement la dynamique semble converger plutôt vers les configurations stables de basse énergie.

Nous n’avons pas encore réussi à analyser la dynamique α -asynchrone pour α proche de 0. Le comportement de Minorité devient plus complexe car la fonction d’énergie n’est plus décroissante sous cette dynamique. Mais nos résultats devraient être transposables dès que nous saurons analyser le comportement de l’automate cellulaire $1D$ **BCDEFG**(178). À notre étonnement, Minorité encode le comportement de cet automate et sur certaines configurations ces deux comportements sont mêmes identiques. Malheureusement l’analyse de cet automate $1D$ est fort complexe et laisse présager la difficulté de l’étude générale de Minorité.

Le chapitre 7 est consacré à l’étude de Minorité $2D$ utilisant le voisinage de von Neumann. Dans le chapitre 8 nous analysons plus en détails la baisse initiale de l’énergie grâce à une étude de cas assistée par ordinateur. Les techniques que nous avons développées ici ont été conçues

pour Minorité, mais elles devraient être facilement transposables pour d'autres automates.

Chapitre 7

Minorité en dynamique totalement asynchrone avec le voisinage de von Neumann

7.1 Présentation de Minorité

Dans ce chapitre nous considérons l'automate cellulaire 2D Minorité sous la dynamique totalement asynchrone avec le voisinage de von Neumann évoluant sur des configurations 2D toriques de taille $N = n \times m$.

Définition 7.1 (Minorité) *La fonction de transition Minorité δ associe à une cellule l'état minoritaire dans son voisinage, i.e. si une cellule (i, j) d'une configuration c se met à jour, alors :*

$$\delta(c_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si } c_{ij} + c_{i-1,j} + c_{i+1,j} + c_{i,j-1} + c_{i,j+1} \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans la figure 7.1, nous donnons une représentation graphique de la fonction de transition Minorité et nous associons un nom aux cellules en fonction de leur voisinage. Expérimentalement, Minorité converge vers une configuration stable (voir section 6.3). Ces configurations stables sont constituées de régions pavées par des motifs en damier.

Définition 7.2 (Motif en damier) *Un sous-ensemble de cellules $R \subset \mathbb{T}$ est connexe si R est connexe pour la relation de voisinage.*

Nous disons que R est pavé par un motif en damier si toutes les cellules adjacentes dans R sont dans des états différents.

Une bande horizontale (resp. verticale) de largeur w est un ensemble de cellules $R = \{(i, j) : k \leq i < k + w\}$ pour un certain k (resp., $R = \{(i, j) : k \leq j < k + w\}$).

7.2 Énergie d'une configuration

Les paramètres suivants apparaissent naturellement pour mesurer la stabilité d'une configuration, i.e., la distance séparant les cellules de l'état minoritaire dans leur voisinage. En renouant avec les principes de l'analyse amortie et des travaux de Tarjan [85], nous définissons un potentiel local qui mesure l'instabilité locale dans la configuration. En procédant par analogie avec les modèles de spin en physique statistique (voir le modèle d'Ising [46]), nous assignons à chaque cellule un potentiel représentant le bénéfice qu'elle tire à changer d'état ; ce potentiel

Voisinage de Von Neumann	 Cellule isolée	 Péninsule	 Coin	 Pont	 Bord	 Cellule encerclée
Minorité $\delta(c)$	Inactive	Inactive	Active Réversible $\Delta E(c) = 0$	Active Réversible $\Delta E(c) = 0$	Active Irréversible $\Delta E(c) = -4$	Active Irréversible $\Delta E(c) = -8$
Totalisant externe 976 $\hat{\delta}(\hat{c}) = \oplus \delta(\oplus \hat{c})$	Active Irréversible $\Delta E(c) = -8$	Active Irréversible $\Delta E(c) = -4$	Active Réversible $\Delta E(c) = 0$	Active Réversible $\Delta E(c) = 0$	Inactive	Inactive

FIG. 7.1 – Le nom des voisinages et la table de transition de Minorité δ et de sa contrepartie $\hat{\delta}$ (l'automate cellulaire OT_{976}^{vn} , voir la section 7.4) : seules les cellules actives changent d'état quand elles se mettent à jour.

est naturellement défini comme le nombre de cellules dans son voisinage à qui elle s'oppose (*i.e.*, ici, le nombre de cellules qui sont dans le même état qu'elle) ; en sommant le potentiel de toutes les cellules, nous obtenons l'énergie de la configuration, notion introduite par Hopfield [44]. Comme nous considérons des configurations initiales arbitraires, le système évolue *hors-équilibre* jusqu'à ce qu'il atteigne (si possible) une configuration stable, donc l'énergie va évoluer au cours du temps ; en particulier, comme nous allons le voir dans la proposition 7.9, l'énergie va strictement décroître chaque fois qu'une transition irréversible est faite (*i.e.* chaque fois qu'une cellule de potentiel ≥ 3 est mise à jour). La fonction d'énergie joue un rôle crucial, comme nous le verrons dans la partie 7.7, dans la définition de la fonction potentielle que nous allons utiliser pour prouver la convergence du système. Comme observé dans la section 6.3, le système semble converger vers les configurations d'énergie minimale, comme le ferait un système physique réel.

Définition 7.3 (Energie) *Le potentiel v_{ij} de la cellule (i, j) est le nombre de ses voisines qui sont dans le même état qu'elle. L'énergie d'une configuration c est la somme des potentiels de toutes les cellules : $E(c) = \sum_{i,j} v_{ij}$.*

Définition 7.4 (Frontière) *Il y a une frontière entre deux cellules voisines si elles sont dans le même état, *i.e.* :*

- le côté commun aux cellules (i, j) et $(i, j + 1)$ est une frontière horizontale si $c_{ij} = c_{i,j+1}$;
- le côté commun aux cellules (i, j) et $(i + 1, j)$ est une frontière verticale si $c_{ij} = c_{i+1,j}$.

Définition 7.5 (Région homogène) *Un chemin alternant est une séquence de cellules voisines qui ne traverse pas de frontière, *i.e.*, qui alterne les états des cellules de la séquence.*

Ces chemins définissent une relation d'équivalence «être connecté par un chemin alternant» entre les cellules. Les classes d'équivalence de cette relation sont appelées les régions homogènes de la configuration.

Les propositions suivantes découlent immédiatement des définitions.

Proposition 7.6 *Chaque région homogène est connexe et pavée par l'un des deux motifs en damier  ou . La frontière de chaque région homogène est exactement l'ensemble des frontières touchant une de ses cellules.*

Proposition 7.7 – *Le potentiel d'une cellule correspond au nombre de frontières sur ses côtés.*

- *L'énergie d'une configuration est égale à deux fois le nombre de frontières.*

– Une cellule est active si et seulement si au moins deux de ses côtés sont des frontières.

L'énergie prend donc les valeurs suivantes :

Corollaire 7.8 – Si les dimensions n et m ont même parité, $(\forall c) E(c) \in 4\mathbb{N}$;
– sinon, $(\forall c) E(c) \in 2 + 4\mathbb{N}$.

Preuve. Comme l'énergie est égale à deux fois le nombre de frontières, il suffit de prouver que la parité du nombre de frontières verticales (resp. horizontales) dans chaque ligne (resp. colonne) est la même que la dimension correspondante m (resp. n). Puisque la configuration est torique, il est clair qu'en scannant une ligne, le nombre de changements d'un damier à l'autre est de même parité que la longueur de la ligne. \square

Configurations d'énergie maximale et minimale. L'énergie d'une configuration de taille $n \times m$ appartient à $\{0, 2, 4, \dots, 4N\}$ car chaque paire de cellules adjacentes dans le même état est comptée deux fois et $0 \leq v_{ij} \leq 4$ pour tout (i, j) .

Il y a deux configurations d'énergie maximale $4N$: *tout-noir* et *tout-blanc*.

Si n et m sont pairs, il existe deux configurations d'énergie zéro : les deux *damiers*.

Si n est pair et m impair, l'énergie minimale d'une configuration est $2n$ et une telle configuration consiste en un damier enroulé autour de la dimension impaire créant ainsi une bande verticale de largeur 2 pavée par le motif \blacksquare .

Énergie des configurations stables. Une cellule est inactive si et seulement si son potentiel est ≤ 1 . Donc l'énergie d'une configuration stable appartient à $\{0, 2, \dots, N\}$. Les configurations stables sont donc, comme nous l'attendions, de basse énergie. Si n et m sont pairs et qu'au moins l'un des deux est un multiple de 4, alors il existe des configurations stables d'énergie maximale N , pavées par l'un des motifs en damier gras \blacksquare ou \blacklozenge .

L'énergie est décroissante. Sous la dynamique totalement asynchrone, Minorité ne peut pas faire augmenter l'énergie.

Proposition 7.9 À partir de n'importe quelle configuration initiale c , la séquence de variables valéatoires $E(c^t)$ est une séquence décroissante et $E(c^t)$ décroît d'au moins 4 à chaque fois qu'une cellule de potentiel ≥ 3 est mise à jour.

Preuve. Quand l'état d'une cellule de potentiel v change, son nouveau potentiel est $4 - v$. Parmi ses voisines, v d'entre elles voient leur potentiel décroître de 1 et $4 - v$ voient leur potentiel augmenter de 1. Donc la variation totale d'énergie de la configuration quand une cellule de potentiel v change d'état est $8 - 4v$, valeur qui est toujours négative puisque les cellules actives ont un potentiel ≥ 2 . \square

La figure 7.2 montre l'évolution moyenne de l'énergie au cours du temps, ce qui montre le comportement typique de Minorité. Dans un premier temps, l'énergie de la configuration décroît brutalement au fur et à mesure que les motifs en damier émergent dans la configuration et dans un deuxième temps, l'énergie décroît plus lentement jusqu'à ce que la configuration devienne stable. Les propositions 7.10 et 7.12 montrent en effet que l'énergie baisse très rapidement au début quand les damiers émergent ; les théorèmes 7.22 et 7.33 (dans les sections 7.6 et 7.7) montreront que les dernières étapes de la convergence sont faites en temps polynomial en espérance, tant qu'au moins une des dimensions est paire.

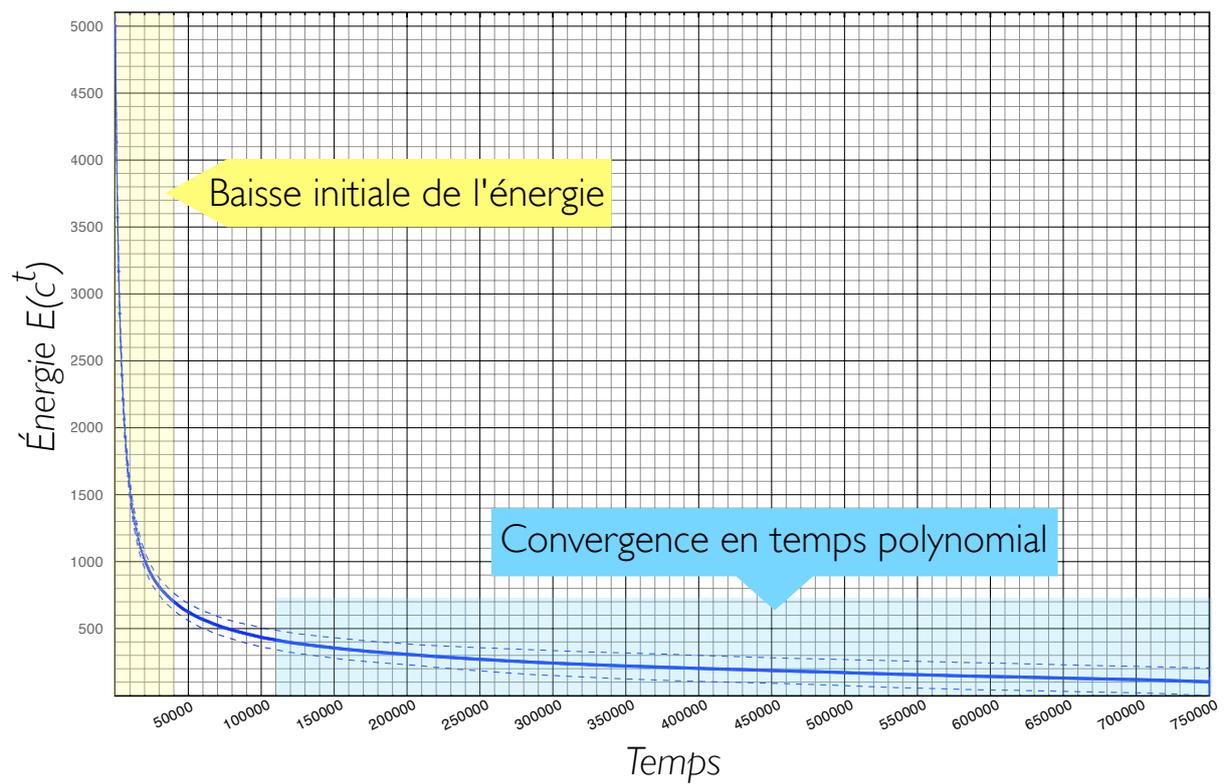


FIG. 7.2 – Évolution de l'énergie moyenne au cours du temps. Moyenne faite sur 100 séquences aléatoires $E(c^t)$ commençant sur des configurations initiales aléatoires c^0 de taille 50×50 (chaque cellule est initialement dans l'état 0 ou 1 avec la même probabilité).

Baisse initiale d'énergie. En un nombre polynomial de pas de temps et depuis n'importe quelle configuration initiale, l'énergie passe en dessous de $5N/3$. Ceci est observé expérimentalement à travers l'apparition rapide des motifs en damier dans les premiers pas de temps de l'évolution :

Proposition 7.10 (Baisse initiale de l'énergie) *La variable aléatoire $T = \min\{t : E(c^t) < 5N/3\}$ est presque sûrement finie et $\mathbb{E}[T] = O(N^2)$.*

Preuve. Considérons une configuration c d'énergie $E > 5N/3$. Nous allons démontrer que c contient soit une cellule de potentiel ≥ 3 , soit deux cellules adjacentes de potentiel 2 dans des états différents. Nous procédons par contradiction, supposons que chaque cellule de c a un potentiel ≤ 2 et que toutes les cellules adjacentes de potentiel 2 sont dans le même état. Soit n_{1-} , n_2 (resp. b_{1-} et b_2) le nombre de cellules noires (resp. blanches) de potentiel ≤ 1 et 2 respectivement. Considérons le graphe biparti qui connecte chaque cellule noire de potentiel 2 à ses voisines blanches de potentiel ≤ 1 . Chaque cellule noire de potentiel 2 est adjacente à exactement deux cellules blanches de potentiel ≤ 1 et chaque cellule blanche de potentiel ≤ 1 est adjacente à au plus 4 cellules noires de potentiel 2. Le nombre d'arêtes dans le graphe biparti est donc au moins $2n_2$ et au plus $4b_{1-}$, donc $2n_2 \leq 4b_{1-}$. Symétriquement, $2b_2 \leq 4n_{1-}$. Mais, $N = n_{1-} + n_2 + b_{1-} + b_2 \geq 3(n_2 + b_2)/2$, donc la configuration admet au plus $2N/3$ cellules de potentiel 2 et son énergie est $\leq N + 2N/3$, contradiction.

Considérons maintenant la fonction potentielle $\Psi(c^t) = 3E(c^t)/2 - N_{3+}(c^t)$ où $N_{3+}(c^t)$ est le nombre de cellules de potentiel ≥ 3 dans c^t . Pour tout t , $0 \leq \Psi(c^t) \leq 6N$. Soit N_2 le nombre de paires de cellules adjacentes de potentiel 2 et dans des états opposés. $E(c^t)$ est une fonction décroissante au cours du temps et à chaque fois qu'une cellule de potentiel ≥ 3 est mise à jour, $E(c^t)$ décroît d'au moins 4, donc :

$$\mathbb{E}[E(c^{t+1}) - E(c^t)] \leq -\frac{4N_{3+}(c^t)}{N}.$$

Une cellule de potentiel 3 peut disparaître seulement si elle-même ou une de ses quatre voisines est mise à jour ; et à chaque fois qu'une cellule de potentiel 2 adjacente à une cellule de potentiel 2 dans l'état opposé est mise à jour, le potentiel de la cellule devient 3. Donc :

$$\mathbb{E}[N_{3+}(c^{t+1}) - N_{3+}(c^t)] \geq \frac{N_2(c^t) - 5N_{3+}(c^t)}{N}.$$

En additionnant ces deux termes, nous obtenons que :

$$\mathbb{E}[\Psi(c^{t+1}) - \Psi(c^t)] \leq -\frac{N_{3+}(c^t) + N_2(c^t)}{N}.$$

Donc, tant que $E(c^t) \geq 5N/3$, $\Psi(c^t)$ décroît en espérance d'au moins $1/N$ à chaque pas de temps. Comme Ψ est bornée par $6N$, d'après le lemme 1.45, après au plus $O(N^2)$ pas de temps en espérance soit $E(c^t)$ passe en dessous $5N/3$, soit $\Psi(c^t)$ passe en dessous de $3N/2$ ce qui implique également $E(c^t) \leq 5N/3$. \square

Émergence des motifs en damier. Selon les expériences, les motifs en damier apparaissent très rapidement dans les premiers pas de temps de l'évolution. Ceci est dû à la chute brutale d'énergie. Soit C_k le nombre de carrés de cellules de taille 2×2 dans la configuration qui contiennent dans leur intérieur exactement k frontières.

Proposition 7.11 – C_0 est le nombre de carrés de taille 2×2 pavés par des motifs en damier,
– $N = C_0 + C_2 + C_4$,
– $E = 2C_2 + 4C_4$.

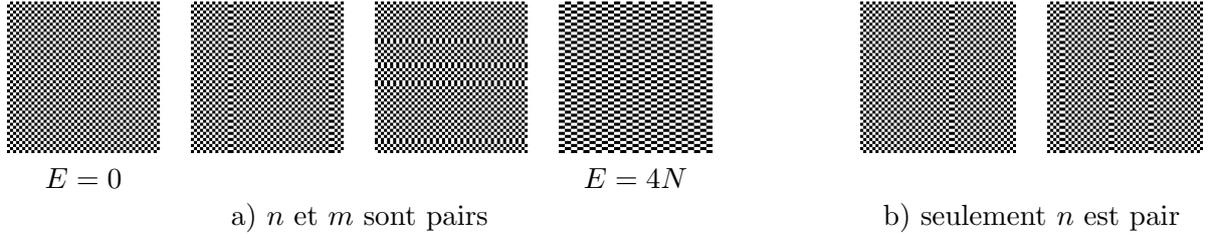


FIG. 7.3 – Exemples de configurations stables.

Preuve. Par la proposition 7.6, les frontières sont les limites des régions de damiers, donc k est forcément pair, *i.e.* 0, 2 ou 4 ; ainsi le nombre total de carrés de taille 2×2 est $N = C_0 + C_2 + C_4$. De nouveau par la proposition 7.6, C_0 compte les 2×2 carrés pavés par des motifs en damier. Finalement par la proposition 7.7, l'énergie est égale à deux fois le nombre de frontières, et comme chaque frontière apparaît exactement dans deux carrés, nous avons $E = 2C_2 + 4C_4$. \square

Proposition 7.12 (Émergence des damiers) *Après $O(N^2)$ pas de temps en espérance, au moins $N/6$ des carrés de cellules de taille 2×2 de la configuration sont pavés par des motifs en damier.*

Preuve. En combinant les deux équations de la proposition 7.11, nous obtenons que $C_0 = N - E/2 + C_4 \geq N - E/2$. Mais par la proposition 7.10, après $O(N^2)$ pas de temps en espérance, $E \leq 5N/3$, ce qui implique que $C_0 \geq N/6$. \square

7.3 Configuration stable

Proposition 7.13 (Configuration stable) *Les configurations stables sont les configurations composées de bandes parallèles pavées par des motifs en damier. Plus précisément :*

- si n et m sont pairs, les configurations stables sont les configurations composées de juxtapositions de bandes horizontales (ou verticales) de largeur ≥ 2 pavées par des motifs en damier ;
- si n (resp. m) est impair et m (resp. n) est pair, les bandes sont obligatoirement horizontales (resp. verticales).
- finalement, si n et m sont impairs, alors il n'existe pas de configuration stable.

Preuve. Dans une configuration stable, chaque cellule touche au plus une frontière. Donc les frontières d'une région homogène sont des lignes droites à distance ≥ 2 les unes des autres. \square

Corollaire 7.14 *Si n et m sont impairs, alors Minorité n'atteint jamais de configuration stable.*

7.4 Couplage avec l'automate cellulaire totalisant externe 976

À partir de maintenant et jusqu'à la fin du chapitre (à l'exception du corollaire 7.16, de l'exemple 7.17 et de la section 7.6), nous considérons que n et m sont pairs. Soit \boxtimes la configuration damier d'énergie 0 définie comme suit : $\boxtimes_{ij} = (i + j) \bmod 2$. Étant donné deux configurations c et c' , soit $c \oplus c'$ la configuration XOR c'' telle que $c''_{ij} = (c_{ij} + c'_{ij}) \bmod 2$.

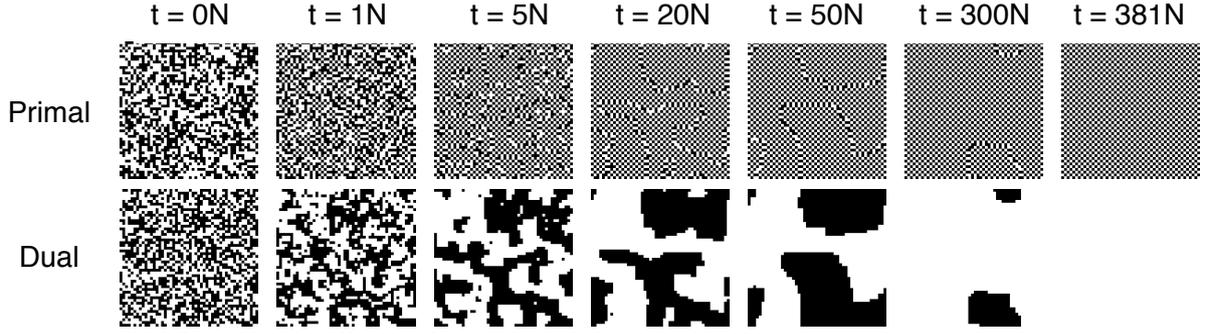


FIG. 7.4 – L'évolution couplée de Minorité δ sur les configurations primales $(c^t)_{t \geq 0}$ (en haut) et sa contrepartie OT_{976}^{vn} sur les configurations duales (\hat{c}^t) (en bas). À partir de $t = 50N$, c^t et \hat{c}^t sont des configurations bornées (voir section 7.7).

Configuration duale. Comme observé auparavant, la dynamique totalement asynchrone de Minorité tend à converger à partir de n'importe quelle configuration initiale vers des configurations constituées de grandes régions pavées par des motifs en damier. À la place d'une trajectoire $(c^t)_{t \geq 0}$, il est donc plus agréable de considérer la séquence de *configurations duales* $(\hat{c}^t)_{t \geq 0}$ définie par $\hat{c}^t = \boxtimes \oplus c^t$, dans cette nouvelle séquence les grandes régions pavées par des motifs en damier apparaissent comme des grandes régions homogènes blanches ou noires. De façon évidente, la configuration duale \hat{c}^t évolue selon la fonction aléatoire $\hat{\delta}(\cdot) = \boxtimes \oplus \delta(\boxtimes \oplus \cdot)$, en effet pour tout t , $\hat{c}^{t+1} = \boxtimes \oplus c^{t+1} = \boxtimes \oplus \delta(c^t) = \boxtimes \oplus \delta(\boxtimes \oplus \hat{c}^t) = \hat{\delta}(\hat{c}^t)$.

Par construction, les deux trajectoires $(c^t)_{t \geq 0}$ et $(\hat{c}^t)_{t \geq 0}$ sont couplées : la *même* cellule aléatoire est mise à jour dans les deux configurations à chaque pas de temps. La fonction de transition $\hat{\delta}$ associée à une cellule (i, j) d'une configuration \hat{c} l'état :

$$\hat{\delta}(\hat{c}_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Sigma \geq 3, \\ 1 - \hat{c}_{ij} & \text{si } \Sigma = 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{avec } \Sigma = \hat{c}_{i-1,j} + \hat{c}_{i+1,j} + \hat{c}_{i,j-1} + \hat{c}_{i,j+1},$$

Cette fonction de transition est en fait celle de l'automate cellulaire totalisant externe OT_{976}^{vn} . Ses transitions sont données dans la figure 7.1.

Les configurations stables de OT_{976}^{vn} . Par définition, l'énergie d'une configuration duale \hat{c} et le potentiel de la cellule (i, j) sont les quantités correspondantes, $E(\hat{c})$ et v_{ij} , calculées dans la configuration primale. Par la proposition 7.13, les configurations duales stables pour la fonction de transition duale $\hat{\delta}$ sont les configurations duales composées de bandes homogènes blanches et noires de largeur ≥ 2 . Les deux configurations duales d'énergie minimale 0 sont tout-blanc et tout-noir.

Expérimentalement, toutes les configurations duales sous la dynamique totalement asynchrone de $\hat{\delta}$ évoluent vers de larges régions noires et blanches (correspondant aux damiers dans la configuration primale). Informellement, ces régions évoluent comme suit (voir figure 7.1) :

- les points isolés et les péninsules ont tendance à disparaître ;
- les bords et les cellules encerclées sont stables ;
- les grandes régions s'érodent de façon aléatoire par les coins ou les ponts qui peuvent changer d'état de façon réversible ; leurs frontières suivent une sorte de marche aléatoire $2D$ jusqu'à ce que de grandes bandes sans coin se forment (voir figure 7.4 ou [45]).

7.5 Convergence à partir d'une configuration initiale arbitraire

Dans cette section, nous considérons une configuration initiale c^0 arbitraire et montrons que la dynamique totalement asynchrone de Minorité converge toujours vers une configuration stable après un nombre exponentiel de pas de temps en espérance si au moins une des deux dimensions est paire.

Théorème 7.15 *En dynamique totalement asynchrone, quand les deux dimensions de la configuration sont paires, l'automate Minorité converge presque sûrement vers une configuration stable à partir de n'importe quelle configuration initiale. Son temps de relaxation est $O(2N^{2N+1})$.*

Preuve. Selon le couplage défini ci-dessus, il est équivalent de prouver ce théorème pour la fonction de transition duale $\hat{\delta}$. La séquence suivante de mises à jour pour la fonction $\hat{\delta}$ transforme n'importe quelle configuration duale \hat{c} en configuration stable :

- **Phase I :** Tant qu'il existe une cellule blanche active, en choisir une et la mettre à jour.
- **Phase II :** Tant qu'il existe une cellule noire active, en choisir une et la mettre à jour.

Pendant la phase I, les régions noires s'étendent jusqu'à définir des bandes ou des rectangles. À la fin de la phase I, toutes les cellules blanches sont inactives et, selon les transitions de la figure 7.1, sont donc soit encerclées ou soit des bords. En particulier, aucune bande de cellules blanches de largeur 1 ne survit. Pendant la phase II, les rectangles et les bandes de largeur 1 de cellules noires sont progressivement érodées et finissent par disparaître. Finalement, seulement les bandes noires de largeur ≥ 2 survivent à la fin de la phase II et la configuration est stable puisqu'elle est uniquement composée de bandes homogènes blanches ou noires de largeur ≥ 2 (voir proposition 7.13).

Durant chaque phase, au plus N cellules changent d'état. Donc, à partir de n'importe quelle configuration \hat{c} , il existe un chemin de longueur au plus $2N$ vers une configuration stable. Maintenant, segmentons la trajectoire $(c^t)_{t \geq 0}$ en segments $(c^{2Nk+1}, \dots, c^{2N(k+1)})$ de longueur $2N$. La séquence de mises à jour faite dans chaque segment a une probabilité supérieure à $1/N^{2N}$ d'être une séquence de mises à jour, de longueur inférieure à $2N$, qui transforme c^{2Nk} en configuration stable. Comme ces événements sont indépendants, il faut au plus N^{2N} essais en moyenne pour tirer une telle séquence de mises à jour. Minorité et OT_{976}^{vn} convergent donc presque sûrement vers une configuration stable à partir de n'importe quelle configuration initiale. Leur temps de relaxation est $O(N^{2N+1})$. \square

Corollaire 7.16 *En dynamique α -asynchrone, à partir de n'importe quelle configuration initiale de taille $n \times m$ où n est pair et m impair, l'automate Minorité converge presque sûrement vers une configuration stable. Son temps de relaxation est $O(N^{3N+1})$.*

Preuve. Considérons les cellules à l'intérieur du rectangle de taille $n \times (m - 1)$ excluant la dernière colonne $m - 1$. Considérons la configuration duale à l'intérieur de ce rectangle et appliquons la même séquence de mises à jour que précédemment. Après la phase I, les régions noires à l'intérieur du rectangle sont devenues des bandes et des rectangles. De plus, il ne reste plus aucune bande blanche horizontale, car m étant impair, l'un des coins d'une telle bande serait actif (quels que soient les états des cellules dans la dernière colonne). Après la phase II, les rectangles noirs sont éliminés ainsi que les bandes noires horizontales (car m étant impair, l'un des coins d'une telle bande serait actif). À ce point, les cellules actives restantes sont situées dans la dernière colonne et éventuellement dans l'une des colonnes voisines $m - 2$ ou 0 . Considérons les cellules à l'intérieur du rectangle vertical de largeur 7 centré sur la dernière colonne. Considérons la configuration duale à l'intérieur de ce rectangle, les deux colonnes les plus à droite et les deux colonnes les plus à gauche sont stables. En appliquant le même algorithme sur les trois colonnes

centrales, une suite d'au plus $6n$ mises à jour permet de stabiliser ces trois colonnes. Ainsi il existe une séquence de longueur au plus $2N + 6n \leq 3N$ mises à jour qui stabilise n'importe quelle configuration initiale. Nous concluons cette preuve par le même argument que précédemment. \square

Exemple 7.17 (Conjecture) *Considérons une configuration de taille $(2n + 1) \times 2n^3$ et une frontière qui s'enroule deux fois autour de la petite dimension (voir figure 7.5).*

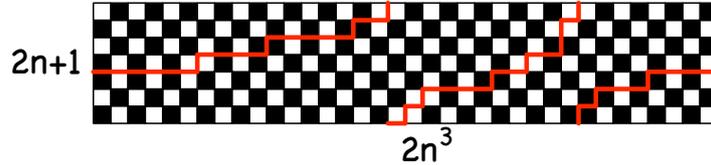


FIG. 7.5 – une configuration avec une dimension impaire depuis laquelle l'espérance du temps de convergence est conjecturé exponentiel.

Minorité peut converger si et seulement si la frontière se déroule, i.e., seulement si elle réussit à se toucher elle-même, ce qui est possible uniquement si les lignes se tordent pour former deux rectangles dont les coins se touchent en un point du tore. Malheureusement, la "tension" imposée par l'enroulement tend à éloigner les deux parties de la frontière (pour pouvoir se tordre en un rectangle, les n marches aléatoires correspondant aux tournants doivent se synchroniser). Nous conjecturons donc que ce croisement des frontières, nécessaire pour converger vers un point fixe, ne se produit qu'après un nombre exponentiel de mises à jour en espérance (les expériences semblent confirmer cette conjecture).

7.6 Convergence à partir d'une configuration semi-bornée

Nous supposons ici que n est pair, m peut être pair ou impair. Nous montrons dans cette section que si la configuration contient une bande de largeur 2 pavée par des motifs en damier, alors la dynamique converge presque sûrement rapidement vers une configuration stable, i.e., le temps de relaxation est polynomial en espérance.

Définition 7.18 (Configuration semi-bornée) *Une configuration c est semi-bornée si elle contient une colonne de largeur 2 pavée par des damiers. Sans perte de généralité, nous supposons qu'il s'agit des deux colonnes les plus à gauche et qu'elles sont pavées par le motif $\begin{smallmatrix} \blacksquare & \square \\ \square & \blacksquare \end{smallmatrix}$, ainsi une configuration c est semi-bornée si $c_{ij} = (i + j) \bmod 2$ pour tout (i, j) où $0 \leq j \leq 1$.*

Lemme 7.19 *Si une configuration c^t est semi-bornée, alors c^{t+1} l'est aussi.*

Preuve. Les cellules dans les deux colonnes pavées par des damiers ont trois de leurs voisines qui appartiennent à ces colonnes et qui sont donc dans l'état opposé au leur ; ces cellules sont donc inactives (quel que soit l'état de la cellule qui n'est pas dans les deux colonnes). \square

Dans la configuration duale d'une configuration semi-bornée, les deux colonnes les plus à gauche sont toutes blanches et le blanc tend à contaminer petit à petit les colonnes voisines, à moins que deux colonnes consécutives soient toutes noires (dans ce cas les cellules de cette bande noire sont inactives et le resteront à jamais). Nous étudions ici ce processus de contamination et montrons qu'après $O(n^2N)$ pas de temps en espérance, soit la troisième colonne est toute blanche (et donc inactive) soit les troisièmes et quatrièmes colonnes sont toutes noires (et donc

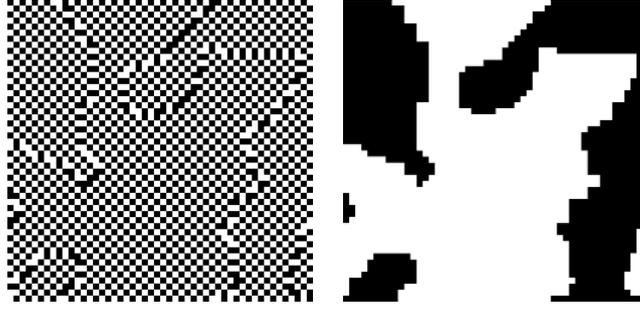


FIG. 7.6 – Une configuration semi-bornée et sa configuration duale.

inactives). La borne en temps polynomial sur le temps de relaxation est un corollaire de ce résultat. Dans ce but, nous introduisons une fonction potentielle pour mesurer la distance aux configurations ciblées et montrons que la dynamique se rapproche en espérance à chaque pas de temps de ces configurations.

Fonction potentielle. Considérons une configuration semi-bornée c . Une 0 -région désigne ici une suite de cellules de la troisième colonne deux à deux voisines dans l'état 0 dans la configuration duale $(\hat{c}_{0,2}, \hat{c}_{1,2}, \dots, \hat{c}_{n-1,2})$. Posons

$$\Psi(c) = \begin{cases} n + 1, & \text{si la troisième colonne de } \hat{c} \text{ est toute blanche;} \\ \text{la longueur de la grande } 0\text{-région de la troisième colonne de } \hat{c}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posons $\Delta\Psi(c) = \Psi(\delta(c)) - \Psi(c)$, la variable aléatoire correspondant à la variation de Ψ après un pas de temps à partir de la configuration c .

Lemme 7.20 *Pour toute configuration semi-bornée \hat{c} où il existe au moins une cellule de la troisième colonne active, alors*

$$(a) \mathbb{E}[\Delta\Psi(c)] \geq 0$$

et

$$(b) \Pr\{|\Delta\Psi(c)| \geq 1\} \geq \frac{1}{N}.$$

Preuve. Comme la seconde colonne de \hat{c} est toute blanche, toute cellule blanche de la troisième colonne ayant ses deux voisines de la troisième colonne dans l'état blanc est soit un bord, soit une cellule encerclée. Elle est donc inactive (voir figure 7.1). Toute cellule noire de la troisième colonne ayant au moins une de ses deux voisines de la troisième colonne dans l'état blanc est soit un coin, soit une péninsule. Elle est donc active.

Dans un premier temps, supposons qu'il n'y ait qu'une seule cellule noire dans la troisième colonne de \hat{c} . Cette cellule est active et la mettre à jour accroît $\Psi(c)$ de 2. Mettre à jour l'une des deux voisines de la cellule noire fait décroître $\Psi(c)$ de 1 si cette cellule est active et 0 sinon. Toutes les autres cellules de la colonne sont inactives. Donc (a) et (b) sont vrais dans ce cas.

Dans un deuxième temps, supposons qu'il existe une unique 0 -région de taille maximale $\leq n - 2$ dans la troisième colonne de \hat{c} . Les seules cellules dont la mise à jour peut éventuellement faire décroître la fonction potentielle sont les deux cellules blanches situées aux extrémités de cette 0 -région. Mettre à jour une de ces deux cellules fait décroître la fonction potentielle d'au plus 1. Les deux cellules noires jouxtant la 0 -région sont forcément actives et

mettre l'une des deux à jour fait accroître la fonction potentielle d'au moins 1. Mettre à jour n'importe quelle autre cellule laisse $\Psi(c)$ inchangé. Donc (a) et (b) sont vrais dans ce cas.

Dans un troisième temps, supposons qu'il existe plusieurs 0-régions de taille maximale dans la troisième colonne de \hat{c} . Alors, $\Psi(c)$ ne peut pas décroître au prochain pas de temps (car une seule cellule sera mise à jour en un pas de temps). De plus mettre à jour n'importe laquelle des cellules noires jouxtant ces 0-régions fait augmenter $\Psi(c)$ d'au moins 1. Donc (a) et (b) sont vrais dans ce cas.

Finalement, si la troisième colonne de \hat{c} est toute noire, $\Psi(c)$ ne peut pas décroître et mettre à jour n'importe quelle cellule noire active de cette colonne accroît $\Psi(c)$ par 1. Donc (a) et (b) sont vrais dans ce cas. \square

Lemme 7.21 *Pour toute configuration semi-bornée c , les cellules de la troisième colonne sont toutes inactives après $O(n^2N)$ pas de temps en espérance et une fois inactives, elles le restent.*

Preuve. Si toutes les cellules de la troisième colonne sont inactives alors elles le resteront toujours. En effet, si ces cellules sont inactives, soit elles sont toutes blanches dans la configuration duale et le resteront toujours, soit elles sont toutes noires et comme elles sont inactives et que leur voisine de la deuxième colonne est blanche, alors leur voisine dans la quatrième colonne est noire aussi, ainsi, toutes les cellules de la troisième et quatrième colonne sont noires, et donc inactives et le resteront toujours.

Le lemme 7.20 prouve que tant qu'il reste une cellule active dans la troisième colonne, l'espérance de la variation de la fonction potentielle $\Psi(c)$ est positive et qu'elle a une probabilité au moins $1/N$ de varier d'au moins 1. Comme $\Psi(c)$ prend ses valeurs entre 0 et $n + 1$, le lemme 1.48 montre qu'au bout de $O(n^2N)$ pas de temps en espérance, soit $\Psi(c)$ atteint la valeur $n + 1$ (dans ce cas toutes les cellules de la troisième colonne sont blanches dans \hat{c} et donc inactives) soit toutes les cellules noires de la troisième colonne sont devenues inactives (dans ce cas toutes les seules de la deuxième et de la troisième colonne sont devenues noires dans \hat{c}). Donc au bout d'un temps $O(n^2N)$ en espérance, toutes les cellules de la troisième colonne sont inactives. \square

Théorème 7.22 *Sous la dynamique totalement asynchrone, Minorité converge presque sûrement vers une configuration stable à partir de n'importe quelle configuration initiale semi-bornée. Le temps de relaxation est $O(nN^2)$.*

Preuve. Considérons une configuration semi-bornée c . Soit $t_1 = 0$ et tout pour $2 \leq j < m$, t_j le premier temps t où toutes les cellules dans les j colonnes les plus à gauche de c^t sont inactives. Par définition, t_{m-1} est le temps de convergence du processus. Et, $t_{m-1} = \sum_{j=2}^{m-1} (t_j - t_{j-1})$ et par le lemme 7.21, $\mathbb{E}[t_j - t_{j-1}] = O(n^2N)$. Donc, $\mathbb{E}[t_{m-1}] = O(n^2Nm) = O(nN^2)$. \square

7.7 Convergence à partir d'une configuration bornée

Dans cette section, nous considérons que n et m sont pairs. Expérimentalement, l'automate converge rapidement vers une configuration stable qui se trouve être souvent une des deux configurations stables en damier d'énergie nulle. Nous montrons dans cette partie, qu'en effet si la trajectoire atteint une configuration composée d'une région arbitraire entourée par un motif en damier, alors la trajectoire converge après un nombre polynomial de pas de temps en espérance vers la configuration stable pavée par le damier correspondant ; ceci correspond à l'analyse des derniers pas de temps du comportement observé expérimentalement. Contrairement aux

configurations semi-bornées, quand la configuration est complètement entourée par un motif en damier, l'espérance du temps de convergence est bien plus rapide. Cette borne plus précise est obtenue par d'autres moyens.

Définition 7.23 (Configuration bornée) *Une configuration c est bornée s'il existe un rectangle de taille $(n-2) \times (m-2)$ tel que les états des cellules de c à l'extérieur de ce rectangle forment un motif en damier. Sans perte de généralité, nous supposons que le coin supérieur gauche du rectangle est $(1,1)$ et que le damier est \blacklozenge , i.e., une configuration c est bornée si $c_{ij} = (i+j) \bmod 2$ pour tout $(i,j) \in \{(i,j) : (-1 \leq i \leq 0) \text{ ou } (-1 \leq j \leq 0)\}$.*

Lemme 7.24 *Si c est une configuration bornée alors, $\delta(c)$ l'est aussi.*

Preuve. Les cellules à l'extérieur du rectangle appartiennent au motif en damier et ont donc au moins trois cellules adjacentes dans l'état opposé au leur ; ces cellules sont donc inactives (et cela quel que soit l'état de leur quatrième cellule adjacente). \square

Une configuration bornée est donc équivalente à une perturbation finie dans une configuration 2D infinie pavée par le motif \blacklozenge . Comme le dual de \blacklozenge est la configuration bornée toute blanche, la configuration duale d'une configuration bornée est donc équivalente à un nombre fini de cellules noires, incluses dans un rectangle de taille $(n-2) \times (m-2)$ dans une configuration 2D blanche infinie. Nous nous plaçons maintenant dans ce cas.

Définition 7.25 (Convexité) *Un ensemble de cellules $R \subseteq \mathbb{Z}^2$ est convexe si pour toutes paires de cellules (i,j) et $(i+k,j)$ (resp., $(i,j+k)$) de R , les cellules $(i+l,j)$ (resp., $(i,j+l)$) pour $0 \leq l \leq k$ appartiennent à R . Un ensemble R est une île si R est connexe et convexe.*

Notre preuve sur la convergence de Minorité en temps polynomial sur les configurations bornées repose sur une fonction potentielle qui décroît au cours du temps. En fait, pour définir le variant, nous n'avons pas besoin de considérer la structure interne des configurations bornées, mais seulement l'enveloppe convexe des cellules noires des configurations duales.

Définition 7.26 (Enveloppe convexe d'une configuration) *Pour tout ensemble de cellules $R \subseteq \mathbb{Z}^2$, $\text{env}(R)$ est l'enveloppe convexe des cellules de R , i.e., $\text{env}(R) = \bigcap \{S \subseteq \mathbb{Z}^2 : S \text{ est convexe et } S \supseteq R\}$. Étant donnée une configuration duale \hat{c} , l'enveloppe convexe de \hat{c} , $\text{env}(\hat{c})$, est la configuration duale où les cellules noires sont les cellules dans l'enveloppe convexe des cellules noires de \hat{c} , i.e., si $R = \{(i,j) : \hat{c}_{ij} = 1\}$, $\text{env}(\hat{c})_{ij} = 1$ si et seulement si $(i,j) \in \text{env}(R)$. Une configuration c est convexe si $\hat{c} = \text{env}(\hat{c})$.*

Nous disons que $\hat{c} \leq \hat{c}'$ si pour tout (i,j) , $\hat{c}_{ij} \leq \hat{c}'_{ij}$. Notons que par définition, $\hat{c} \leq \text{env}(\hat{c})$. Soit \hat{c} une configuration duale convexe bornée. Pour chaque cellule noire (i,j) de \hat{c} , l'île de \hat{c} qui contient la cellule (i,j) est la configuration duale \hat{c}' connexe, convexe et maximale telle que $\hat{c}'_{ij} = 1$ et $\hat{c}' \leq \hat{c}$. Ceci définit une unique décomposition en îles noires de la configuration bornée convexe \hat{c} (voir la figure 7.7 pour un exemple).

La fonction potentielle. Nous considérons la fonction potentielle suivante :

$$\Phi(\hat{c}) = \frac{E(\text{env}(\hat{c}))}{4} + |\text{env}(\hat{c})|,$$

où $|\text{env}(\hat{c})|$ est le nombre de cellules noires dans la configuration de l'enveloppe convexe $\text{env}(\hat{c})$. Nous allons montrer qu'à partir de n'importe quelle configuration initiale c^0 , $\Phi(c^t)$ décroît d'au moins $1/N$ en espérance à chaque pas de temps et cela jusqu'à atteindre la valeur 0,

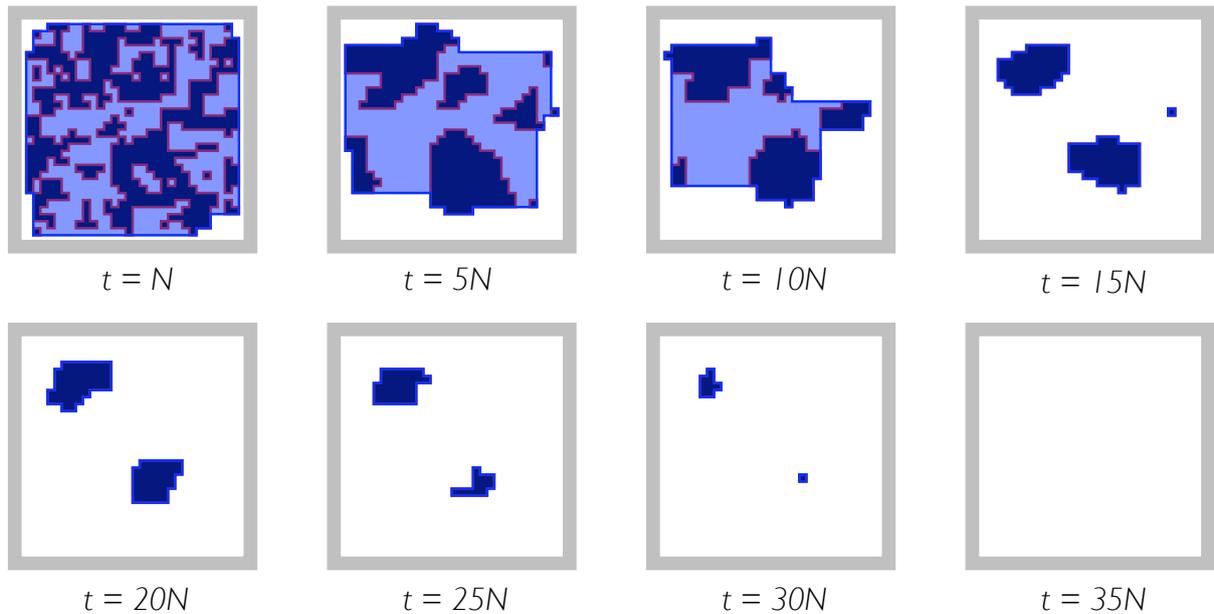


FIG. 7.7 – Une évolution typique d’une configuration duale bornée avec son enveloppe convexe (en bleue). Notez que l’enveloppe convexe n’est pas forcément connexe : à $t = 15N$, elle est composée de plusieurs îles.

i.e., jusqu’à ce que la configuration primale c^t et la configuration duale \hat{c}^t convergent vers la configuration damier infini et la configuration tout-blanc infinie respectivement. Pour prouver que $\Phi(c^t)$ décroît en espérance, nous avons besoin d’étudier l’évolution de l’enveloppe convexe de \hat{c}^t ; dans ce but, nous introduisons une fonction de transition duale modifiée $\bar{\delta}$ qui préserve la convexité de la configuration, cette fonction est couplée avec les deux autres. Étant donnée une configuration duale \hat{c} , $\bar{\delta}(\hat{c})$ est la configuration aléatoire (couplée) telle que :

$$\bar{\delta}(\hat{c}) = \begin{cases} \hat{\delta}(\hat{c}) & \text{si la cellule mise à jour par } \hat{\delta} \text{ n'est pas un pont noir,} \\ \hat{c} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme 7.27 *Si \hat{c} est une configuration duale bornée et convexe, alors $\bar{\delta}(\hat{c})$ l’est aussi.*

Preuve. La seule transition active pour la fonction de transition $\hat{\delta}$ qui pourrait briser la convexité des cellules noires est la mise à jour d’un pont noir (voir figure 7.1), mais cette transition n’est pas active dans $\bar{\delta}$. \square

Lemme 7.28 *Pour toute paire de configurations duales bornées et convexes \hat{c} et \hat{c}' , si $\hat{c} \leq \hat{c}'$ alors $E(\hat{c}) \leq E(\hat{c}')$.*

Preuve. L’énergie d’une configuration \hat{c} est définie comme deux fois le nombre de cellules adjacentes duales dans des états opposés, c’est-à-dire deux fois le nombre de côtés de cellules sur les frontières des îles noires qui composent \hat{c} , *i.e.* deux fois leur périmètre. Comme $\hat{c} \leq \hat{c}'$, les îles noires qui composent \hat{c} sont incluses dans les îles noires qui composent \hat{c}' . De plus, sur chaque colonne et chaque ligne d’une configuration convexe, il y a au plus une région de cellules noires. Ainsi, la somme des périmètres des îles noires de \hat{c} qui sont incluses dans une même île noire de \hat{c}' est majorée par le périmètre de cette île et donc $E(\hat{c}) \leq E(\hat{c}')$. \square

Le lemme suivant prouve que l'image de l'enveloppe convexe de \hat{c} par $\bar{\delta}$ majore l'enveloppe convexe de l'image de \hat{c} par $\hat{\delta}$.

Lemme 7.29 *Pour toute configuration duale bornée \hat{c} , $\hat{\delta}(\hat{c}) \leq \bar{\delta}(\text{env}(\hat{c}))$.*

Preuve. Nous devons montrer que

- si une cellule blanche active pour $\hat{\delta}$ se met à jour dans \hat{c} , la cellule qui lui correspond dans $\bar{\delta}(\text{env}(\hat{c}))$ est noire et
- si une cellule noire active pour $\bar{\delta}$ se met à jour dans $\text{env}(\hat{c})$, alors la cellule qui lui correspond dans $\hat{\delta}(\hat{c})$ est blanche.

Ceci est la conséquence directe du couplage entre $\hat{\delta}$ et $\bar{\delta}$.

Si une cellule blanche active pour $\hat{\delta}$ se met à jour dans \hat{c} et si la cellule qui lui correspond dans $\text{env}(\hat{c})$ est blanche, alors les deux cellules deviennent noires. Si une cellule blanche active pour $\bar{\delta}$ se met à jour dans $\text{env}(\hat{c})$ et si la cellule qui lui correspond dans $\hat{\delta}(\hat{c})$ est noire alors, puisque cette cellule est active dans \hat{c} pour $\hat{\delta}$, elle a au moins deux voisines noires et donc toutes ces trois cellules sont noires dans $\text{env}(\hat{c})$. De plus au moins l'une des deux voisines blanches de la cellule dans \hat{c} est noire dans $\text{env}(\hat{c})$, sinon cela contredirait la convexité ou la minimalité (sur le nombre de cellules noires) de $\text{env}(\hat{c})$. Cette cellule noire de $\text{env}(\hat{c})$ est donc soit un bord, soit une cellule encerclée et elle est inactive. Donc si une cellule blanche active pour $\hat{\delta}$ se met à jour dans \hat{c} , la cellule correspondante dans $\bar{\delta}(\text{env}(\hat{c}))$ est noire.

Une cellule noire active pour la fonction de transition $\bar{\delta}$ dans la configuration $\text{env}(\hat{c})$ est une cellule active dans \hat{c} pour la fonction de transition $\hat{\delta}$. Donc si une cellule noire active pour $\bar{\delta}$ dans $\text{env}(\hat{c})$ se met à jour, la cellule qui lui correspond dans $\hat{\delta}(\hat{c})$ est blanche. \square

Soit $\Delta\Phi_\lambda(\hat{c})$ la variable aléatoire correspondant à la variation de la fonction potentielle après un pas de temps à partir de la configuration \hat{c} sous la fonction de transition aléatoire λ , i.e., $\Delta\Phi_\lambda(\hat{c}) = \Phi(\lambda(\hat{c})) - \Phi(\hat{c})$. Pour une configuration \hat{c} , $|\hat{c}|_1$ désigne le nombre de cellules noires dans la configuration.

Corollaire 7.30 *Pour toute configuration bornée \hat{c} , $\Delta\Phi_{\hat{\delta}}(\hat{c}) \leq \Delta\Phi_{\bar{\delta}}(\text{env}(\hat{c}))$.*

Preuve. Par définition,

$$\Delta\Phi_{\bar{\delta}}(\text{env}(\hat{c})) - \Delta\Phi_{\hat{\delta}}(\hat{c}) = \frac{E(\bar{\delta}(\text{env}(\hat{c}))) - E(\text{env}(\hat{\delta}(\hat{c})))}{4} + |\bar{\delta}(\text{env}(\hat{c}))|_1 - |\text{env}(\hat{\delta}(\hat{c}))|_1.$$

Selon le lemme 7.29, $\text{env}(\hat{\delta}(\hat{c})) \leq \bar{\delta}(\text{env}(\hat{c}))$ et donc $|\text{env}(\hat{\delta}(\hat{c}))|_1 \leq |\bar{\delta}(\text{env}(\hat{c}))|_1$. Et par le lemme 7.28, puisque les deux configurations sont convexes, $E(\text{env}(\hat{\delta}(\hat{c}))) \leq E(\bar{\delta}(\text{env}(\hat{c})))$. \square

Lemme 7.31 *Pour toute configuration bornée \hat{c} qui consiste en une unique île noire,*

$$-\frac{4}{N} \leq \mathbb{E}[\Delta\Phi_{\bar{\delta}}(\hat{c})] \leq -\frac{3}{N}.$$

Preuve. Chaque cellule active se met à jour avec probabilité $1/N$. Selon la fonction de transition $\bar{\delta}$ (la même que $\hat{\delta}$, figure 7.1, sauf que les ponts noirs sont inactifs), si \hat{c} consiste en une île noire de taille au moins 2,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Delta\Phi_{\bar{\delta}}(\hat{c})] &= -\frac{1}{N} (\#\{\text{coins noirs}\} + 2 \#\{\text{péninsules noires}\}) + \frac{1}{N} \#\{\text{coin blanc}\} \\ &= -\frac{1}{N} \#\{\text{angles saillants}\} + \frac{1}{N} \#\{\text{angles rentrants}\} = -\frac{4}{N}, \end{aligned}$$

Car pour tout polygone convexe, nous avons $\#\{\text{angles saillants}\} - \#\{\text{angles rentrants}\} = 4$. Finalement, si \hat{c} consiste en une unique cellule noire (cellule isolée), $\Delta\Phi_{\bar{\delta}}(\hat{c}) = -3/N$. \square

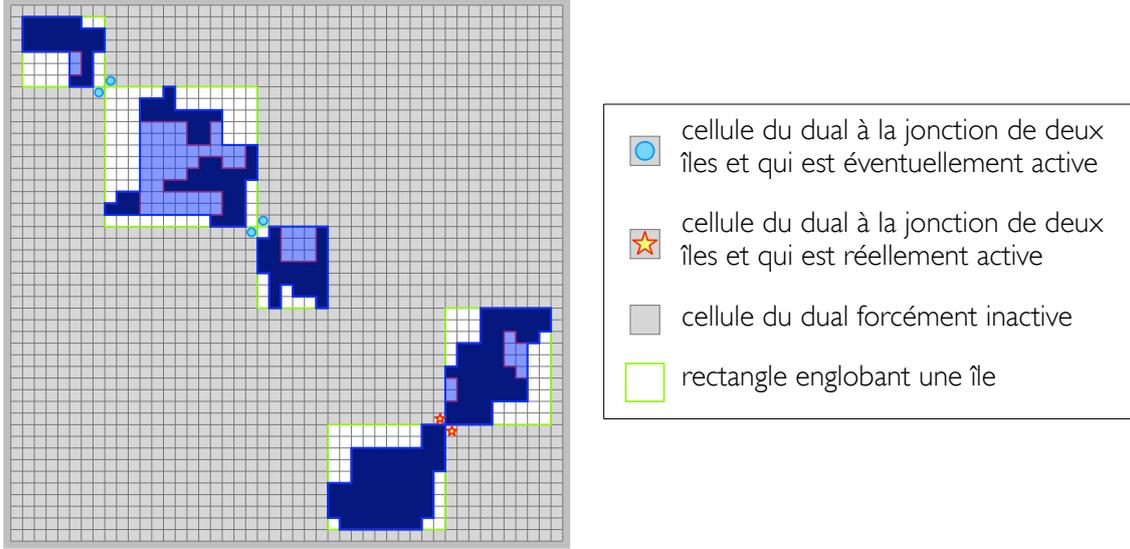


FIG. 7.8 – Les seules positions possibles des cellules actives en dehors des îles composant l’enveloppe convexe d’une configuration duale.

Lemme 7.32 *Pour toute configuration bornée qui n’est pas entièrement blanche \hat{c} ,*

$$\mathbb{E}[\Delta\Phi_{\delta}(\hat{c})] \leq \frac{-\ell}{N},$$

où ℓ est le nombre d’îles qui composent $\text{env}(\hat{c})$.

Preuve. Par le corollaire 7.30, $\mathbb{E}[\Delta\Phi_{\delta}(\hat{c})] \leq \mathbb{E}[\Delta\Phi_{\delta}(\text{env}(\hat{c}))]$. Par la convexité de $\text{env}(\hat{c})$, une ligne ou une colonne ne peut être traversée que par une seule des îles qui composent $\text{env}(\hat{c})$. Donc, il est possible de numéroter les îles de 1 à ℓ de gauche à droite, et les contacts entre les îles ne peuvent avoir lieu qu’entre deux îles consécutives dans le coin à la jonction de leurs rectangles englobants (voir figure 7.8). Chaque contact crée au plus deux nouvelles cellules blanches actives qui peuvent contribuer chacune au plus pour $+1/N$ à $\mathbb{E}[\Delta\Phi_{\delta}(\text{env}(\hat{c}))]$. La contribution de chaque île à $\mathbb{E}[\Delta\Phi_{\delta}(\text{env}(\hat{c}))]$ est au plus $-3/N$ selon le lemme 7.31. Donc :

$$\mathbb{E}[\Delta\Phi_{\delta}(\text{env}(\hat{c}))] \leq -\frac{3\ell}{N} + \frac{2(\ell-1)}{N} \leq -\frac{\ell}{N}.$$

□

Théorème 7.33 *En dynamique totalement asynchrone, l’automate Minorité converge presque sûrement vers la configuration d’énergie minimale, \boxtimes , à partir de n’importe quelle configuration initiale bornée. Le temps de relaxation est $O(AN)$ où A est l’aire totale des îles de $\text{env}(\hat{c})$.*

Preuve. Pour tout $t \geq 0$, $\Phi(\hat{c}^t) \leq 2(n-2+m-2)+A \leq 2N+A$. Tant que \hat{c}^t n’est pas la configuration tout-blanc, $\Phi(\hat{c}^t) > 0$ et selon le lemme 7.32, $\mathbb{E}[\Delta\Phi_{\delta}(\hat{c}^t)] \leq -1/N$. Donc par le lemme 1.45, la variable aléatoire $T = \min\{t : \Phi(\hat{c}^t) \leq 0\}$ est presque sûrement finie et $\mathbb{E}[T] = O(nA)$; et au moment $t = T$, \hat{c}^T et c^T sont les configurations stables tout-blanc et \boxtimes , respectivement. □

Proposition 7.34 (Configuration de pire temps de convergence) *Considérons la configuration duale initiale \hat{c} de taille $n \times n$ consistant en un rectangle noir de taille $2 \times (n-2)$. L’espérance du temps nécessaire pour effacer une ligne complète de ce rectangle est au moins $\Omega(nN) = \Omega(AN)$.*

Preuve. Considérons la configuration duale initiale \hat{c} de taille $n \times n$ consistant en un rectangle noir de taille $2 \times (n - 2)$. La première cellule effacée dans une colonne donnée est forcément un coin noir. Ce coin a été créé en effaçant une de ces deux voisines noires dans les colonnes voisines. L'espérance du temps entre l'effacement d'une cellule noire dans une colonne et l'effacement de sa voisine noire dans la colonne adjacente est $\Omega(N)$ (l'espérance du temps pour mettre à jour le nouveau coin noir) et donc l'espérance du temps nécessaire pour effacer une ligne complète du rectangle est au moins $\Omega(nN) = \Omega(AN)$. \square

7.8 Conclusion

Nous avons adapté ici les techniques basées sur les marches aléatoires $1D$ que nous avons utilisées dans la première partie à la dimension 2. Nous les avons réutilisées, avec de nouveaux ingrédients, pour analyser Minorité avec le voisinage Moore [82]. Dû à des contraintes de place, nous ne présentons pas ces travaux ici. Nous pensons que ces techniques peuvent être généralisées pour étudier les automates totalisant externes présentant un type de comportement similaire à Minorité : une transition de phase quand α varie et l'apparition de motifs particuliers qui envahissent la configuration quand α est proche de 0. Nous sommes actuellement en train d'essayer d'améliorer ces outils pour étudier les frontières de n'importe quelle région. Nous espérons ainsi prouver que l'espérance du temps de convergence est polynomial pour n'importe quelle configuration initiale, tant que n et m sont pairs (nous pensons que le temps de relaxation est $O(N^3)$ pour les configurations $2D$ toriques non bornées de dimensions paires). Ce résultat conclurait l'étude de cet automate sous la dynamique totalement asynchrone. L'extension de nos résultats à la dynamique α -asynchrone est un problème difficile, par exemple la plupart des résultats sur les modèles de spin et les lattices de gaz s'appliquent uniquement quand la température tend vers 0, *i.e.*, quand une seule transition a lieu à chaque pas de temps.

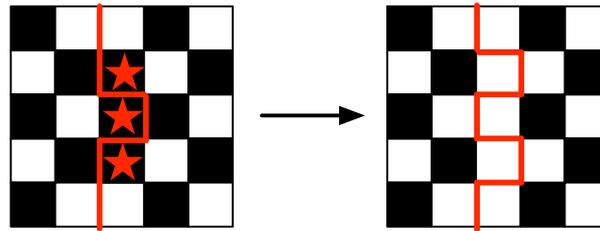
7.9 Perspectives sur l'étude de la dynamique α -asynchrone

L'étude de Minorité $2D$ s'est avérée plus complexe que nous le pensions au premier abord. L'analyse de son comportement en dynamique totalement asynchrone n'est pas encore totalement achevée mais nous sommes néanmoins capables de l'expliquer en grande partie. Nous avons essayé de porter nos résultats à la dynamique α -asynchrone. Pour le moment, nos tentatives ont abouti à plusieurs remarques mais nous n'avons pas encore eu le temps de les transformer en résultats. Nous récapitulons ici ces premières constatations. La première d'entre elles étant le fait que l'énergie n'est plus décroissante au cours du temps. Il suffit de considérer les motifs de la figure 7.9 pour voir que le nombre de frontières peut augmenter.

Fait 7.35 *Il existe des configurations c , telles que la séquence de variables valéatoires $E(c^t)$ ne soit pas une séquence décroissante.*

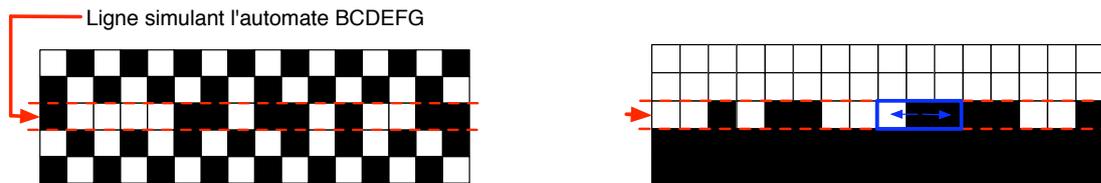
Les informations apportées par la fonction d'énergie ne sont donc plus aussi utiles qu'en dynamique totalement asynchrone. De plus, nous nous sommes rendus compte que Minorité $2D$ encode le comportement de l'automate $1D$ **BCDEFG**(178) (voir le chapitre 5).

Fait 7.36 *Considérons une configuration faite de trois bandes horizontales : les deux premières sont de largeur ≥ 2 , pavées par des motifs en damier opposés (donc stables) et occupent toute la configuration sauf une ligne qui correspond à la bande de largeur 1 (voir figure 7.10). Les effets des cellules au dessus et en dessous s'annulent et les transitions dépendent uniquement des deux voisines à gauche et à droite et on a donc un automate cellulaire $1D$ sur cette ligne qui*



★ : cellule active se mettant à jour

FIG. 7.9 – Deux motifs représentant une évolution possible de Minorité 2D en dynamique α -asynchrone impliquant une hausse d'énergie (les frontières sont dessinées en rouge).



Une configuration de Minorité 2D simulant l'automate **BCDEFG**.

La configuration duale, le rectangle bleu représente une cellule et ses deux voisins dans la ligne.

FIG. 7.10 – L'automate **BCDEFG** apparaît dans le comportement de Minorité 2D.

*se trouve être minorité 1D dans le primal et **BCDEFG** (i.e. toutes les transitions sont actives sauf tout noir et tout blanc) dans le dual.*

Ainsi, le théorème 5.3 du chapitre 5 page 82 implique que quand $\alpha > 0.996$ Minorité 2D diverge avec probabilité strictement positive à partir d'une configuration infinie où une seule cellule diffère d'une configuration stable.

Ce résultat indique que Minorité 2D est au moins aussi complexe à étudier que l'automate **BCDEFG**. Vraisemblablement, vu que l'analyse de la dynamique totalement asynchrone de Minorité 2D est plus compliquée que l'analyse de la dynamique totalement asynchrone de **BCDEFG**, nous pensons que Minorité 2D est encore plus complexe que **BCDEFG** pour la dynamique α -asynchrone. Par contre, les lemmes 7.19 et 7.24 sur les configurations semi-bornées et bornées restent vrais en dynamique α -asynchrone et dans ces types de configurations, les comportements de ces deux automates semblent liés quand α est proche de 0. Si nous déplaçons les cellules de la zone hachurée de la figure 7.11 pour former une configuration 1D alors le comportement de cette configuration n'est pas exactement identique à la règle **BCDEFG** mais lui ressemble fortement (la dynamique est biaisée vers la disparition des cellules noires dans certains cas). Minorité 2D semble être une exécution en parallèle de plusieurs automates 1D ressemblant à **BCDEFG**. C'est pourquoi nous disions dans le chapitre 5 que tout résultat sur cet automate quand α est proche de 0 serait une grande avancée car il est presque certain qu'un tel résultat permettrait d'étendre notre étude de Minorité 2D de la dynamique totalement asynchrone à la dynamique α -asynchrone.

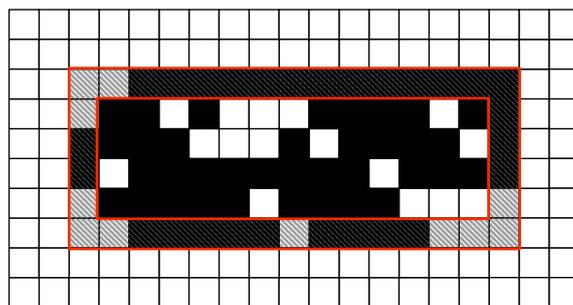


FIG. 7.11 – L'automate **BCDEFG** apparaît dans une configuration bornée de Minorité $2D$.

Chapitre 8

Étude de la baisse initiale d'énergie

Les résultats contenus dans ce chapitre ont été publiés dans [79]. Le but de ce chapitre est de générer automatiquement des preuves du type :

”Considérons un automate évoluant sous la dynamique totalement asynchrone tel qu’il est possible d’associer à chaque cellule un potentiel où l’énergie d’une configuration, définie comme la somme des potentiels des cellules, soit décroissante au cours du temps. Alors cette énergie descend en dessous d’une constante b en un temps polynomial en espérance.”

Les outils que nous présentons ici, ont été développés pour Minorité $2D$. Pour les automates totalisant externes présentant un comportement similaire à Minorité $2D$, il doit être possible de généraliser les notions de potentiel et d’énergie, mais nous n’avons malheureusement pas encore eu le temps d’explorer cette voie. Si tel est le cas, nos travaux devraient demander très peu de modifications pour fournir des résultats semblables pour chacun de ces automates.

Pour arriver au résultat voulu, nous présentons ici deux outils complémentaires :

- l’algorithme 3,
- le théorème 8.8.

L’algorithme permet de générer une liste de motifs et une constante k telles que :

- toute configuration d’énergie $E \geq b$ contient un des motifs de la liste,
- la présence d’un des motifs de la liste dans une configuration entraîne l’existence d’une séquence de mises à jour de longueur inférieure à k telle que si les cellules se mettent à jour dans cet ordre, alors l’énergie décroît.

Le théorème 8.8 nous permet de conclure en affirmant que si toutes les configurations d’énergie supérieure à b admettent une séquence de mises à jour de longueur inférieure à k entraînant une baisse d’énergie, alors l’énergie descend rapidement en dessous de b en espérance.

Notre algorithme prend en entrée une taille et énumère tous les motifs de cette taille. Plus la taille des motifs étudiés est grande plus la borne b obtenue sera petite mais plus la longueur des séquences k sera grande. Notons que le théorème 8.8 prouve que la baisse initiale d’énergie se produit en temps polynomial en la taille de la configuration en espérance, mais avec une constante exponentielle en la taille de k (qui est constant une fois une taille de motif fixée). Également, par cette méthode, la borne b obtenue ne sera jamais inférieure à l’énergie la plus haute d’une configuration stable (N dans le cas de Minorité $2D$ avec le voisinage de von Neumann). Ceci montre la limite de cette approche mais confirme l’existence de deux phases dans cet automate : une baisse initiale de l’énergie due à des considérations locales puis une baisse due à l’évolution de formes $2D$ où les interactions entre les frontières/particules nécessitent de réunir des fragments d’informations qui peuvent être arbitrairement loin dans la configuration.

Finalement, dans le chapitre 7 concernant Minorité 2D avec le voisinage de von Neumann en dynamique totalement asynchrone, nous avons prouvé, dans le théorème 7.10, qu'au bout d'un temps polynomial en espérance l'énergie descend en dessous de $\frac{5}{3}mn$ (où m et n sont les dimensions de la configuration), grâce à notre nouvelle méthode nous avons prouvé le théorème suivant :

Théorème 8.1 *Pour l'automate cellulaire Minorité 2D avec le voisinage de von Neumann en dynamique totalement asynchrone, la variable aléatoire $T = \min\{t : E(c^t) < 18\lceil\frac{m}{4}\rceil\lceil\frac{n}{4}\rceil\}$ est presque sûrement finie et $E[T] = O(N^2)$.*

8.1 Un théorème sur les séquences décroissantes

Définition 8.2 (Séquence décroissante) *Étant donnée une configuration c , une séquence finie $\mathcal{S} = (c_i)_{1 \leq i \leq j}$ de cellules (j est la taille de la séquence) est une séquence décroissante si mettre successivement à jour les j cellules dans l'ordre c_1 à c_j conduit à une configuration de plus basse énergie que c . Le voisinage $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ d'une séquence \mathcal{S} est l'ensemble des cellules de la séquence et de leurs voisines (pour la relation de voisinage de l'automate considéré : celui de von Neumann dans notre cas).*

Notons que si une configuration c possède une séquence décroissante de taille j , alors pour tout $k \geq j$, elle possède une séquence décroissante de taille k . Comme l'énergie est décroissante, une suite décroissante le reste quand on la poursuit par une suite quelconque de mises à jour.

Fait 8.3 (Évolution d'une séquence décroissante) *Étant données une configuration c^t et une séquence décroissante $\mathcal{S} = (c_i)_{1 \leq i \leq j}$ de longueur j , alors :*

- avec probabilité $\frac{1}{N}$, la cellule c_1 se met à jour, et soit l'énergie décroît, soit $\mathcal{S}' = (c_i)_{2 \leq i \leq j}$ est une séquence décroissante de c^{t+1} .
- avec probabilité $\frac{|\mathcal{V}(\mathcal{S})|-1}{N}$, une cellule $c_0 \in (\mathcal{V}(\mathcal{S}) \setminus c_1)$ se met à jour, et soit le potentiel de c_0 est ≥ 3 et l'énergie diminue, soit le potentiel de c_0 est 2 et $\mathcal{S}' = (c_i)_{0 \leq i \leq j}$ est une séquence décroissante, soit le potentiel de c_0 est ≤ 1 et \mathcal{S} est encore décroissante.
- avec probabilité $\frac{N-|\mathcal{V}(\mathcal{S})|}{N}$ une cellule qui n'appartient à $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ se met à jour : l'énergie peut éventuellement décroître mais \mathcal{S} est encore une séquence décroissante.

Pour le moment nous allons prouver notre résultat principal, le théorème 8.8, en faisant des hypothèses. Nous verrons dans la prochaine section comment prouver ces hypothèses.

Définition 8.4 (Hypothèse $\mathcal{H}(\mathcal{E}, k)$) *Pour une taille de configuration N fixé, soit $\mathcal{H}(\mathcal{E}, k)$ l'hypothèse : "toutes les configurations d'énergie au moins \mathcal{E} admettent une séquence décroissante de taille inférieure à k ".*

Définition 8.5 (Marche aléatoire \mathcal{M}_k) *Soit $k \in \mathbb{N}^*$, une marche aléatoire de type \mathcal{M}_k est un processus stochastique discret $(X^t)_{t \geq 0}$ prenant ses valeurs dans $\{0, \dots, k\}$ tel que $X^0 = k$ et :*

	$P(X^{t+1} = X^t - 1)$	$P(X^{t+1} = X^t)$	$P(X^{t+1} = X^t + 1)$
si $X^t = 0$	0	1	0
si $X^t \in \{1, \dots, k-1\}$	$\frac{1}{N}$	$\frac{N-5X^t}{N}$	$\frac{5X^t-1}{N}$
si $X^t = k$	$\frac{1}{N}$	$\frac{N-1}{N}$	0

Lemme 8.6 *Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et une marche aléatoire $\mathcal{M}_k = (X^t)_{t \geq 0}$ alors la variable aléatoire $T' = \min\{t | X^t = 0\}$ a pour espérance $E[T'] = O((5k)^{k+1}N)$.*

Lemme 8.7 Soit une configuration c^0 d'énergie \mathcal{E} et $k \in \mathbb{N}$, supposons que l'hypothèse $\mathcal{H}(\mathcal{E}, k)$ est vraie alors la variable aléatoire $T = \min\{t : E(c^t) < \mathcal{E}\}$ a pour espérance $E[T] = O((5k)^{k+1}N)$.

Preuve. La preuve est basée sur un couplage entre $(c^t)_{t \geq 0}$ et une marche $\mathcal{M}_k = (X^t)_{t \geq 0}$. L'invariant vérifié à chaque pas de temps de notre couplage est

soit $E(c^t) < \mathcal{E}$, soit il existe une séquence décroissante $\mathcal{S} = (c_i)_{1 \leq i \leq X^t}$ de longueur X^t dans la configuration c^t .

À chaque pas de temps t , les processus X^t et c^t évoluent selon le couplage suivant :

- si $E(c^t) < \mathcal{E}$ alors X^t est mise à jour selon la règle de la définition 8.5 et indépendamment une cellule de c^t choisie aléatoirement uniformément dans \mathbb{T} est mise à jour.
- Autrement, posons $j = X^t$, $j \neq 0$, et nous considérons la séquence décroissante $S^t = (c_i)_{1 \leq i \leq j}$ de c^t de taille j et :
 - si $j = k$, avec probabilité

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{N} \quad X^{t+1} = X^t - 1 \text{ et } c_1 \text{ se met à jour.} \\ \frac{N-1}{N} \quad X^{t+1} = X^t \text{ et une cellule choisie aléatoirement et uniformément parmi } \mathbb{T} \setminus \{c_1\} \text{ se met à jour.} \end{array} \right.$$
 - si $0 < j < k$, avec probabilité

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{N} \quad X^{t+1} = X^t - 1 \text{ et } c_1 \text{ se met à jour.} \\ \frac{|\mathcal{V}(\mathcal{S})|-1}{N} \quad X^{t+1} = X^t + 1 \text{ et une cellule choisie aléatoirement et uniformément parmi } \mathcal{V}(\mathcal{S}) \text{ se met à jour.} \\ \frac{5j-|\mathcal{V}(\mathcal{S})|}{N} \quad X^{t+1} = X^t + 1 \text{ et une cellule choisie aléatoirement et uniformément parmi } \mathbb{T} \setminus \mathcal{V}(\mathcal{S}) \text{ se met à jour.} \\ \frac{N-5j}{N} \quad X^{t+1} = X^t \text{ une cellule choisie aléatoirement et uniformément parmi } \mathbb{T} \setminus \mathcal{V}(\mathcal{S}) \text{ se met à jour.} \end{array} \right.$$

Dans ce couplage, chaque cellule de c^t est mise à jour de façon uniforme et X^t évolue bien selon la règle de la définition 8.5. Maintenant, nous prouvons par récurrence sur t que ce couplage préserve l'invariant. Au temps $t = 0$, $X^0 = k$ et puisque $E(c^0) = \mathcal{E}$ alors selon $\mathcal{H}(\mathcal{E}, k)$, il existe une séquence décroissante de taille k dans c^t . Maintenant, considérons qu'au temps t :

- $E(c^t) < \mathcal{E}$ alors $E(c^{t+1}) < \mathcal{E}$ puisque l'énergie est décroissante au cours du temps.
- $X^t = k$ et $E(c^t) = \mathcal{E}$ alors par $\mathcal{H}(\mathcal{E}, k)$, il existe une séquence décroissante $\mathcal{S} = (c_i)_{1 \leq i \leq k}$:
 - si $X^{t+1} = X^t$ alors soit $E(c^{t+1}) < \mathcal{E}$, soit $E(c^{t+1}) = \mathcal{E}$ et par $\mathcal{H}(\mathcal{E}, k)$ il existe une séquence décroissante \mathcal{S}' de taille k ,
 - si $X^{t+1} = X^t - 1$ alors la cellule c_1 se met à jour et selon le fait 8.3 soit $E(c^{t+1}) < \mathcal{E}$, soit $E(c^{t+1}) = \mathcal{E}$ et $(c_i)_{2 \leq i \leq k}$ est une séquence décroissante de longueur $k - 1$.
- $X^t = j$ où $0 < j < k$ et $E(c^t) = \mathcal{E}$ alors par l'hypothèse d'induction il existe une séquence décroissante $\mathcal{S} = (c_i)_{1 \leq i \leq j}$:
 - si $X^{t+1} = X^t$ alors la cellule mise à jour n'est pas dans $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ et soit $E(c^{t+1}) < \mathcal{E}$, soit $E(c^{t+1}) = \mathcal{E}$ et \mathcal{S} est toujours décroissante,
 - si $X^{t+1} = X^t - 1$ alors la cellule c_1 se met à jour et selon le fait 8.3 soit $E(c^{t+1}) < \mathcal{E}$, soit $E(c^{t+1}) = \mathcal{E}$ et $(c_i)_{2 \leq i \leq j}$ est décroissante de longueur $j - 1$,
 - si $X^{t+1} = X^t + 1$ alors la cellule $c_0 \in \mathcal{V}(\mathcal{S})$ se met à jour et selon le fait 8.3 soit $E(c^{t+1}) < \mathcal{E}$, soit $E(c^{t+1}) = \mathcal{E}$ et $(c_i)_{0 \leq i \leq j}$ est décroissante de longueur $j + 1$.

Notre couplage est donc correctement défini. Désignons par $T' = \min\{t | X^t = 0\}$ la première fois où la marche aléatoire atteint la valeur 0. À l'instant T' , soit $E(c^{T'-1}) < \mathcal{E}$, soit $E(c^{T'-1}) = \mathcal{E}$ et au temps $T' - 1$ une cellule de potentiel ≥ 3 (correspondant à la dernière cellule d'une séquence décroissante de taille 1) se met à jour. Donc $T \leq T'$ et $E[T] \leq E[T']$. Selon le fait 8.6, $E[T'] = O((5k)^{k+1}N)$ et donc $E[T] = O((5k)^{k+1}N)$. \square

Théorème 8.8 *S'il existe \mathcal{E} et k tels que l'hypothèse $\mathcal{H}(\mathcal{E}, k)$ est vraie alors quelle que soit la configuration initiale c^0 la variable aléatoire $T = \min\{t : E(c^t) < \mathcal{E}\}$ est presque sûrement finie et $E[T] = O((5k)^{k+1}N^2)$.*

Preuve. Soit $t_0 = 0$ et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ si $E(c^{t_{i-1}}) > \mathcal{E}$ nous définissons $t_i = \min\{t | E(c^t) < E(c^{t_{i-1}})\}$. Par le lemme 8.7, t_i est presque sûrement fini si $E(c^{t_{i-1}}) \geq \mathcal{E}$. Soit j la variable aléatoire tel que $T = t_j$. Selon le lemme 8.7 pour tout $i \leq j$, $E[t_i - t_{i-1}] = O((5k)^{k+1}N)$. Comme l'énergie d'une configuration est entre 0 et $4N$, $j < 4N$ et donc $E[T] = O((5k)^{k+1}N^2)$. \square

Dans la prochaine section, nous présentons un algorithme qui calcule une constante k , une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et fournit un certificat comme quoi pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'hypothèse $\mathcal{H}(f(N), k)$ est vraie pour toutes les configurations de taille N . L'algorithme peut calculer plusieurs f et k différents, mais plus la fonction f calculée renvoie des valeurs faibles plus l'algorithme demandera de ressources et plus k sera grand.

8.2 Un algorithme pour énumérer les coloriages décroissants

Nous présentons ici un algorithme qui, étant donné un motif (un ensemble de cellules), calcule tous les *coloriages* de ce motif (*i.e.* toutes les façons d'assigner des états aux cellules de ce motif). Il trie ces coloriages en séparant d'un côté ceux qui sont *décroissants*, *i.e.* ceux dont la présence entraîne l'existence d'une séquence décroissante, et de l'autre ceux restants. Pour les coloriages restants, l'algorithme calcule ensuite l'énergie maximale contenue dans un motif dont les états des cellules correspondent à un tel coloriage. Ensuite, il suffit de multiplier cette énergie maximale par le nombre de motifs nécessaires pour recouvrir toute la configuration de taille N et ceci donne une borne \mathcal{E} telle que l'hypothèse $\mathcal{H}(\mathcal{E}, j)$ est vraie pour les configurations de taille N .

Définition 8.9 (Motif) *Considérons un ensemble de cellules \mathbb{T} fini de taille $n \times m$. Un motif \mathcal{P} est un sous-ensemble de $\{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\}$. Le motif \mathcal{P}_{ij} centré sur la cellule c_{ij} est l'ensemble de cellules $\cup_{(k,l) \in \mathcal{P}} \{c_{i+k, j+l}\}$.*

Définition 8.10 (Intérieur) *L'intérieur $Int(\mathcal{P})$ d'un motif \mathcal{P} est le motif*

$$\{(i, j) \in \mathcal{P} | (i \pm 1, j) \in \mathcal{P} \text{ et } (i, j \pm 1) \in \mathcal{P}\}.$$

Ainsi, une voisine (pour le voisinage de von Neumann) d'une cellule appartenant à un motif $Int(\mathcal{P})_{ij}$ appartient forcément au motif \mathcal{P}_{ij} . Cette notion se généralise facilement à d'autres voisinages. Nous rappelons que Q désigne l'ensemble des états et que dans notre cas $Q = \{0, 1\}$.

Définition 8.11 (Coloriage) *Un coloriage f du motif \mathcal{P} est une fonction $f : \mathcal{P} \rightarrow Q$. Pour une configuration c et une cellule (i, j) , nous désignons par $C_c^{\mathcal{P}_{ij}}$ le coloriage auquel correspond le motif \mathcal{P}_{ij} dans c , *i.e.* le coloriage*

$$C_c^{\mathcal{P}_{ij}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \rightarrow & Q \\ (k, l) & \rightarrow & c_{i+k, j+l} \end{array}$$

Le coloriage f apparaît dans la configuration c s'il existe (i, j) tel que $C_c^{\mathcal{P}_{ij}} = f$. Soit $Q^{\mathcal{P}}$ l'ensemble des coloriages du motif \mathcal{P} .

Nous allons rechercher les coloriages de $Q^{\mathcal{P}}$ dont la présence dans une configuration c entraîne l'existence d'une séquence décroissante. Ensuite nous calculerons l'énergie maximale d'une configuration où aucun de ces coloriages n'apparaît.

Définition 8.12 (Coloriage k -décroissant) Un coloriage f du motif \mathcal{P} est k -décroissant si toute configuration où f apparaît contient une séquence décroissante de taille k .

Si un coloriage f est k -décroissant alors f est k' -décroissant pour tout $k' > k$.

Définition 8.13 (Potentiel relatif) Soit une configuration c , un motif \mathcal{P}_{ij} qui correspond au coloriage f de $Q^{\mathcal{P}}$ et $(k, l) \in \mathcal{P}$, le potentiel relatif $v'_{kl}(f)$ est défini comme le nombre de voisines de $c_{i+k, j+l}$ dans \mathcal{P}_{ij} qui sont dans le même état qu'elle.

Notons que le potentiel relatif ne dépend pas de c mais seulement de f .

Fait 8.14 Soit une configuration c , un motif \mathcal{P}_{ij} qui correspond au coloriage f de $Q^{\mathcal{P}}$ et $(k, l) \in \mathcal{P}$, si $(k, l) \in \text{Int}(\mathcal{P})$ alors $v'_{kl}(f) = v_{(k+i)(l+j)}$, sinon $v'_{kl}(f) \leq v_{(k+i)(l+j)}$ (voir figure 8.1).

Pour une configuration c , le potentiel relatif d'une cellule (i, j) appartenant à un motif \mathcal{P}_{kl} est une minoration du potentiel de (i, j) . Par contre le potentiel relatif d'une cellule (i, j) appartenant à un motif $\text{Int}(\mathcal{P})_{kl}$ est égal au potentiel de la cellule. Ainsi, pour un coloriage donné f , nous savons calculer l'énergie contenue par l'intérieur d'un motif correspond à f . Nous allons maintenant chercher à prouver qu'il existe une constante k telle que les coloriages, dont l'énergie contenue dans leur intérieur est élevée, sont k -décroissants. Pour cela, nous donnons une méthode permettant de trouver de nombreux coloriages k -décroissants. Puis, nous calculons l'énergie maximale contenue par l'intérieur des coloriages restants.

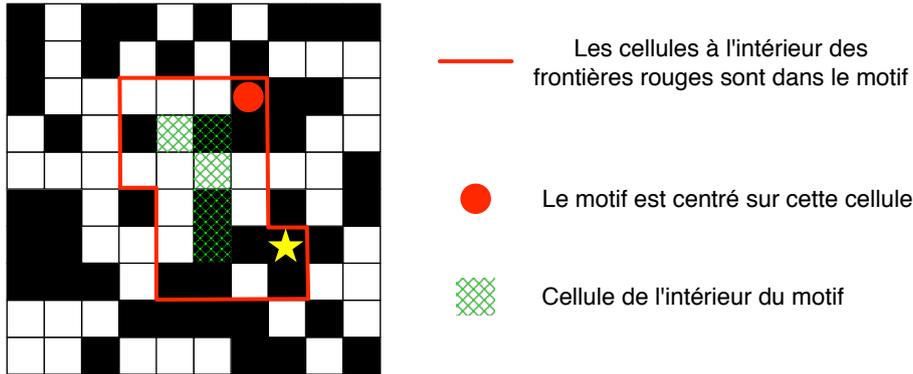


FIG. 8.1 – Représentation d'un motif sur une configuration : pour les cellules de l'intérieur, le potentiel et le potentiel relatif sont égaux tandis que le potentiel relatif de la cellule marquée d'une croix est strictement inférieur à son potentiel.

Lemme 8.15 Soit f un coloriage de \mathcal{P} , s'il existe $(i, j) \in \mathcal{P}$ tel que $v'_{ij}(f) \geq 3$, alors f est 1-décroissant.

Ceci nous donne un premier moyen pour détecter des coloriage 1-décroissants. Mais cette étude n'est pas assez précise. Nous allons également chercher tous les coloriage f dont il existe une séquence de mises à jour qui transforme un motif correspondant à f en un motif correspondant à un coloriage 1-décroissant. Nous modélisons ce problème sous la forme d'un graphe orienté. Pour un motif \mathcal{P} , ses coloriage sont les sommets du graphe et il existe un arc partant du coloriage f_1 vers le coloriage f_2 si pour toute configuration c où f_1 apparaît, il existe une mise à jour qui transforme c en une configuration où f_2 apparaît.

Définition 8.16 *Pour \mathcal{P} , nous définissons le graphe orienté $G^{\mathcal{P}} = (Q^{\mathcal{P}}, E)$ tel qu'il existe une arête du coloriage f_1 vers le coloriage f_2 si :*

- il existe $(i, j) \in \mathcal{P}$ tel que $f_1(i, j) \neq f_2(i, j)$,
- pour tout $(k, l) \neq (i, j)$, $f_1(k, l) = f_2(k, l)$,
- $v'_{i,j}(f_1) = 2$.

Lemme 8.17 *S'il existe un arc du coloriage f_1 au coloriage f_2 dans $G^{\mathcal{P}}$ alors pour toute configuration c où f_1 apparaît, il existe une mise à jour qui transforme c en une configuration où f_2 apparaît.*

Preuve. Considérons une configuration c où f_1 apparaît, alors il existe $(i, j) \in \mathbb{T}$ tel que $C_c^{\mathcal{P}_{ij}} = f_1$. Comme il existe un arc de f_1 vers f_2 , il existe $(k, l) \in \mathcal{P}$ tel que $f_1(k, l) \neq f_2(k, l)$, $v'_{k,l}(f_1) = 2$ et pour tout $(k', l') \in \mathcal{P}$ tel que $(k', l') \neq (k, l)$, $f_1(k', l') = f_2(k', l')$. Par le lemme 8.14, la cellule $(i + k, j + l)$ est active et en la mettant à jour, nous obtenons une configuration c' telle que $C_{c'}^{\mathcal{P}_{ij}} = f_2$. \square

Lemme 8.18 *S'il existe un chemin de longueur i du coloriage f_1 au coloriage f_2 dans $G^{\mathcal{P}}$ et si f_2 est k -décroissant alors f_1 est $(k + i)$ -décroissant.*

Preuve. Dans une configuration c où f_1 apparaît, alors par itération du lemme 8.17, il existe une séquence de mises à jour \mathcal{S}_1 de longueur i qui transforme c en c' où f_2 apparaît. Il existe une séquence décroissante \mathcal{S}_2 de longueur k dans c' . Ainsi, la séquence $(\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2)$ de longueur $i + k$ est décroissante dans c et le coloriage f_1 est $k + i$ décroissant. \square

Nous disposons maintenant d'un moyen efficace pour détecter des coloriage décroissants : nous commençons par détecter les coloriage 1-décroissants grâce au lemme 8.15. Ensuite nous recherchons, grâce à un parcours en largeur, les coloriage f tels qu'il existe un chemin de f à un coloriage 1-décroissant dans $G^{\mathcal{P}}$ (voir figure 8.2).

Théorème 8.19 *Pour un motif \mathcal{P} , notons \mathcal{C} l'ensemble de coloriage renvoyé par l'algorithme 3. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que tout les coloriage de $Q^{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{C}$ soient k -décroissants.*

Preuve. Comme le graphe $G^{\mathcal{P}}$ est fini, les chemins reliant deux sommets sont finis et ce résultat est une application directe des lemmes 8.15 et 8.18. \square

Définition 8.20 (Recouvrement) *Étant donné un ensemble de cellules \mathbb{T} et un motif \mathcal{P} , un recouvrement $\mathcal{R}^{\mathcal{P}}$ de \mathbb{T} par \mathcal{P} est un ensemble de cellules tel que pour toute cellule (i, j) de \mathbb{T} , il existe une cellule (k, l) de $\mathcal{R}^{\mathcal{P}}$ telle que (i, j) appartienne au motif \mathcal{P}_{kl} .*

Théorème 8.21 *Étant donné un ensemble de cellules \mathbb{T} , un motif \mathcal{P} , le résultat \mathcal{C} de l'algorithme 3 appliqué à \mathcal{P} , une constante b et un recouvrement $\mathcal{R}^{\text{int}(\mathcal{P})}$. Si pour tout coloriage $f \in \mathcal{C}$, nous avons $\sum_{(i,j) \in \text{Int}(\mathcal{P})} v'_{ij} \leq b$, alors il existe une constante k telle que l'hypothèse $\mathcal{H}(b|R^{\text{int}(\mathcal{P})}|, k)$ soit vraie pour toute configuration définie sur \mathbb{T} .*

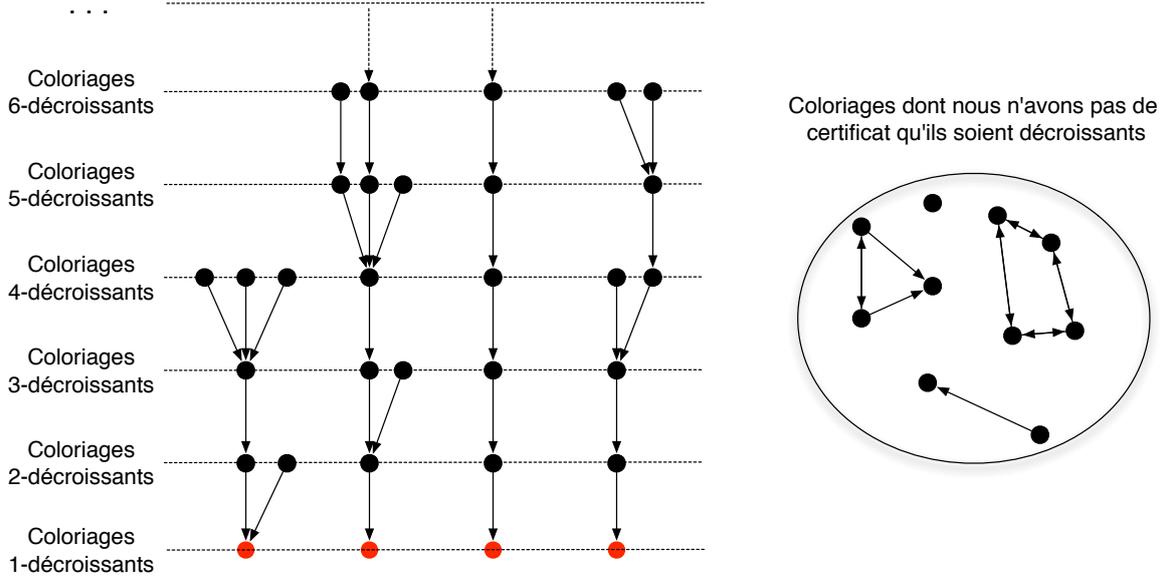


FIG. 8.2 – Exploration du graphe $G^{\mathcal{P}}$ pour détecter les coloriages décroissants.

Algorithme 3 Élimination des coloriages décroissants

Entrées: un motif \mathcal{P} et deux ensembles TEMP et RES initialement vide.

- 1: calculer le graphe $G^{\mathcal{P}}$
 - 2: **pour tout** coloriage f de $Q^{\mathcal{P}}$ **faire**
 - 3: **si** il existe $(i, j) \in \mathcal{P}$ tel que $v'_{ij}(f) \geq 3$ **alors**
 - 4: rajouter f dans TEMP et RES
 - 5: **fin si**
 - 6: **fin pour**
 - 7: **pour tout** coloriage f de TEMP **faire**
 - 8: grâce à un parcours en largeur dans $G^{\mathcal{P}}$, repérer les coloriages pouvant atteindre f dans $G^{\mathcal{P}}$ et les rajouter dans RES
 - 9: **fin pour**
 - 10: **return** $(Q^{\mathcal{P}} \setminus \text{RES})$
-

Preuve. Par le théorème 8.19, il existe une constante k telle que tout coloriage $f \in Q^{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{C}$ soit k -décroissant.

Considérons une configuration c telle que pour toute cellule (i, j) , le motif \mathcal{P}_{ij} corresponde à un coloriage $f \in \mathcal{C}$. Alors puisque $\mathcal{R}^{int(\mathcal{P})}$ est un recouvrement,

$$E(c) = \sum_{(i_1, j_1) \in \mathbb{T}} (v_{i_1 j_1}) \leq \sum_{(i_1, j_1) \in \mathcal{R}^{int(\mathcal{P})}} \left(\sum_{(i_2, j_2) \in \mathcal{P}} (v_{(i_1+i_2)(j_1+j_2)}) \right).$$

Par le lemme 8.14, pour toute cellule (i, j) ,

$$\sum_{(i_2, j_2) \in int(\mathcal{P})} v_{(i_1+i_2)(j_1+j_2)} = \sum_{(i_2, j_2) \in int(\mathcal{P})} v'_{i_2 j_2} \leq b.$$

Et donc :

$$E(c) \leq \sum_{(i_1, j_1) \in \mathcal{R}^{int(\mathcal{P})}} b \leq b |\mathcal{R}^{int(\mathcal{P})}|.$$

Ainsi toute configuration d'énergie supérieure à $b|\mathcal{R}^{int(\mathcal{P})}|$ admet une cellule (i, j) telle que le motif \mathcal{P}_{ij} corresponde à un coloriage $f \in Q^{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{C}$ et donc la configuration admet une séquence décroissante de taille k . Donc, l'hypothèse $\mathcal{H}(b|\mathcal{R}^{int(\mathcal{P})}|, k)$ est vraie pour toute configuration de taille N . \square

8.3 Une nouvelle borne sur la baisse initiale d'énergie

Dans cette partie nous allons mettre en pratique les outils développés dans ce chapitre pour prouver la nouvelle borne sur la baisse initiale d'énergie du théorème 8.1. Pour cela, nous appliquons l'algorithme 3 au motif $\mathcal{P} = (\{-1, \dots, 4\}^2 \setminus \{(-1, -1), (-1, 4), (4, -1), (4, 4)\})$. Grâce à une énumération de cas faite par ordinateur, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 8.22 *Soit $\mathcal{P} = (\{-1, \dots, 4\}^2 \setminus \{(-1, -1), (-1, 4), (4, -1), (4, 4)\})$, l'algorithme 3 appliqué à $\mathcal{C}^{\mathcal{P}}$ renvoie un ensemble de coloriage \mathcal{C} tel que pour tout coloriage f , $\sum_{(i,j) \in int(\mathcal{P})} v'_{ij} \leq 18$.*

Preuve. Pour prouver ce résultat, il suffit d'exécuter l'algorithme 3. En pratique, pour réduire les temps de calcul, nous avons exécuté deux fois l'algorithme : une première fois sur le motif $\mathcal{P}' = \{0, \dots, 3\}^2$. Nous avons ici obtenu un ensemble de coloriages \mathcal{C}' ne contenant que 1092 coloriages parmi les 65536 coloriages de $Q^{\mathcal{P}'}$. Puis nous avons appliqué une deuxième fois l'algorithme, mais cette fois-ci au sous-graphe de $G^{\mathcal{P}}$ tel que la restriction à \mathcal{P}' des coloriages de ce sous-graphe appartienne à \mathcal{C}' . Ceci nous a évité de faire des calculs inutiles et nous obtenons le même résultat qu'en appliquant l'algorithme directement à \mathcal{P} . De la même façon, nos calculs peuvent être réutilisés de la même façon pour étudier des motifs plus gros. \square

Théorème 8.23 *Pour toute configuration de taille $n \times m$, il existe k tel que l'hypothèse $\mathcal{H}(18\lceil \frac{m}{4} \rceil \lceil \frac{n}{4} \rceil, k)$ soit vraie pour toutes dimensions n et m .*

Preuve. Si n et m sont divisibles par 4 alors l'ensemble de cellules $\mathcal{R}_0^{Int(\mathcal{P})} = \{(4i, 4j) : 0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1 \text{ et } 0 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{4} \rfloor - 1\}$ est un recouvrement de \mathbb{T} par $Int(\mathcal{P})$.

- si n n'est pas divisible par 4 alors il suffit de rajouter à \mathcal{R}_0 l'ensemble de cellules $\mathcal{R}_1 = \{(4\lfloor \frac{n}{4} \rfloor, 4j) : 0 \leq j \leq \lfloor \frac{m}{4} \rfloor - 1\}$ pour obtenir un recouvrement,
- si m n'est pas divisible par 4 alors il suffit de rajouter à \mathcal{R}_0 l'ensemble de cellules $\mathcal{R}_2 = \{(4i, 4\lfloor \frac{m}{4} \rfloor) : 0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1\}$ pour obtenir un recouvrement,
- si n et m ne sont pas divisibles par 4 alors il suffit de rajouter à \mathcal{R}_0 les ensembles R_1, R_2 et $\{(4\lfloor \frac{n}{4} \rfloor, 4\lfloor \frac{m}{4} \rfloor)\}$ pour obtenir un recouvrement.

Dans tous les cas, la taille du recouvrement est $\lceil \frac{m}{4} \rceil \lceil \frac{n}{4} \rceil$. Les théorèmes 8.21 et 8.22 permettent de conclure. \square

Appliquer ce résultat au théorème 8.8 prouve le théorème principal 8.1 de ce chapitre.

8.4 Conclusion

Les outils que nous présentons ici ont de nombreuses utilités. Ils ont permis d'obtenir des bornes plus précises sur la baisse initiale d'énergie. C'est également un premier pas vers la généralisation de nos travaux à la classe des automates cellulaires totalisant externes, les techniques présentées ici ne tenant que très peu compte des spécificités de Minorité 2D. De plus, ces preuves sont simples (la section 8.3 est courte) et automatiques. Enfin, formaliser la baisse

initiale d'énergie a permis de montrer la limite de cette approche : l'émergence des damiers est due à des considérations locales mais l'évolution des régions est un phénomène global.

Troisième partie

Minorité sur d'autres topologies

Chapitre 9

Minorité sur les cycles, les cliques et les arbres

Dans cette partie, nous allons poursuivre l'étude de la règle Minorité en dynamique asynchrone mais sur d'autres topologies. Les travaux dans cette partie, effectués en collaboration avec Rouquier [80], sont encore en cours, une version préliminaire existe sous forme de rapport de recherche. Généraliser Minorité à des graphes quelconques est possible car cette fonction de transition peut être définie pour tout voisinage. Dorénavant, nous ne considérons plus une grille mais un graphe où les nœuds représentent les cellules et deux cellules sont voisines si elles sont connectées par une arête. L'ensemble des états est toujours $Q = \{0, 1\}$ et une cellule qui se met à jour passe dans l'état minoritaire dans son voisinage (elle est inactive en cas d'égalité). Dans cette partie, nos résultats porteront sur la dynamique totalement asynchrone où à chaque pas de temps une seule cellule choisie aléatoirement et uniformément se met à jour.

Cette approche permet d'utiliser des techniques différentes de celles utilisées auparavant : il ne s'agit plus de constater le comportement de Minorité mais de structurer le placement des cellules pour obtenir toute la variété possible de comportements. Ainsi nous prouvons que Minorité peut se comporter comme un collectionneur de coupon sur les cliques et comme une marche aléatoire biaisée mettant un temps exponentiel pour converger sur les arbres, deux comportements qui n'apparaissent pas sur la grille. Minorité peut donc converger extrêmement rapidement ou très lentement selon la structure du graphe.

De plus, nous devons étendre les notions de potentiel, d'énergie, de frontières et de particules à ces structures. Cet exercice est un bon entraînement pour mieux les comprendre et espérer trouver une définition convenable pour ces notions, avant de s'attaquer à d'autres automates cellulaires totalisant externes. Les notions de potentiel, d'énergie, de frontières se révèlent généralisables facilement pour tout graphe. La notion de particules est plus complexe, nous n'étions pas capables de la définir formellement dans le cas de la grille avec le voisinage de Moore (une particule semble être un amas de cellules actives voir chapitre 6). Mais dans le cas des arbres cette notion se simplifie grandement au point de se confondre avec la notion de frontière. Ceci sera d'ailleurs d'une grande aide pour nos preuves et permet de mieux comprendre cette notion.

Nous disposons de résultats généraux fournis par l'énergie sur le comportement de Minorité sur des graphes quelconques. Les graphes bipartis semblent posséder de "bonnes propriétés" qui les rendent plus simples à analyser. Mais vu les différences de comportement majeures entre le voisinage de Moore et de von Neumann sur la grille $2D$, il semble improbable d'obtenir des théorèmes précis sur le comportement de Minorité pour un graphe arbitraire.

Notons que le principe de cette étude nous a été inspiré par les travaux de Kittock [54] et de Dyer *et al* [18] qui généralisent la dynamique du dilemme du prisonnier aux graphes et par

les travaux de Kerr *et al* [53] qui généralisent le jeu de pierre-feuille-ciseau aux graphes.

Dans un premier temps, nous récapitulons et adaptons dans la section 9.1, les notions du chapitre 1 dont nous aurons besoin. Ensuite, les sections 9.3.1, 9.3.2, 9.4 et 9.5 sont consacrées respectivement aux cycles, cliques, graphes bipartis et arbres.

9.1 Le modèle

Définition 9.1 (Configuration) Soit $\mathbb{G} = (\mathbb{T}, \mathbb{E})$ un graphe fini non orienté et $Q = \{0, 1\}$ l'ensemble des états. L'ensemble des sommets est l'ensemble des cellules \mathbb{T} et on note la taille du graphe $N = |\mathbb{T}|$. Le voisinage V_i d'une cellule i est l'ensemble de ses cellules adjacentes (en s'incluant elle-même). Une configuration est une fonction $c : \mathbb{T} \rightarrow Q$.

Définition 9.2 (Minorité) Nous considérons la règle de transition δ qui associe à une cellule i d'une configuration c l'état minoritaire dans son voisinage (l'état ne change pas en cas d'égalité) :

$$\delta(c_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j \in V_i} c_j < \frac{|V_i|}{2} \text{ ou } \sum_{j \in V_i} c_j = \frac{|V_i|}{2} \text{ et } c_i = 1 \\ 0 & \text{si } \sum_{j \in V_i} c_j > \frac{|V_i|}{2} \text{ ou } \sum_{j \in V_i} c_j = \frac{|V_i|}{2} \text{ et } c_i = 0 \end{cases}$$

Nous considérons la trajectoire $(c^t)_{t \geq 0}$ sous la dynamique totalement asynchrone où à chaque pas de temps une cellule choisie aléatoirement et uniformément parmi \mathbb{T} se met à jour selon la fonction de transition δ .

Définition 9.3 (Convergence) La dynamique δ converge à partir d'une configuration initiale c^0 vers un attracteur A (respectivement l'ensemble limite \mathcal{A} , voir les définitions 1.22 et 1.23 du chapitre 1) si la variable aléatoire $T = \min\{t : c^t \in A\}$ (respectivement $T = \min\{t : c^t \in \mathcal{A}\}$) est presque sûrement finie.

Puisque nous considérons des graphes finis, Minorité converge presque sûrement à partir de n'importe quelle configuration initiale vers \mathcal{A} .

9.2 Potentiel, énergie et frontière

Comme dans la deuxième partie, nous pouvons définir la notion de potentiel et d'énergie.

Définition 9.4 (Potentiel) Le potentiel v_i d'une cellule i est le nombre de ses voisines (en incluant elle-même) dans le même état qu'elle. Si $v_i \leq \frac{|V_i|}{2}$ alors la cellule est dans l'état minoritaire et donc inactive ; tandis que si $v_i > \frac{|V_i|}{2}$ alors la cellule est active.

À la différence de la deuxième partie, le potentiel d'une cellule prend en compte la cellule elle-même. Ceci simplifie la détermination de l'activité d'une cellule.

Définition 9.5 (Énergie) L'énergie d'une configuration c est $E(c) = \sum_{i \in \mathbb{T}} (v_i - 1)$.

L'énergie d'une configuration est toujours positive et elle est comprise dans les bornes suivantes.

Proposition 9.6 (Bornes sur l'énergie) L'énergie E d'une configuration satisfait

$$2|\mathbb{E}| - 2C_{\max} \leq E \leq 2|\mathbb{E}|,$$

où C_{\max} est le nombre maximum d'arêtes dans une coupe de \mathbb{G} .

Preuve. Chaque arête reliant deux sommets dans le même état contribue pour 2 à l'énergie. Les autres arêtes contribuent pour 0. Ainsi l'énergie est majorée par $2|\mathbb{E}|$, les configurations tout-blanc et tout-noir ont une telle énergie.

Considérons une coupe C . Elle sépare les cellules en deux ensembles disjoints C^0 et C^1 tels que C corresponde exactement à l'ensemble des arêtes reliant les sommets de C^0 aux sommets de C^1 . Considérons la configuration c_C qui associe à chaque sommet de C^0 l'état noir et à chaque sommet de C^1 l'état blanc. Les arêtes de C contribuent pour 0 à l'énergie et les autres pour 2. Ainsi l'énergie de cette configuration est $2|\mathbb{E}| - 2|C|$.

Considérons une configuration c , soit c^n les cellules noires de la configuration et c^b les cellules blanches de la configuration. Soit C les arêtes reliant les sommets de c^b aux sommets de c^n , C est une coupe. Les arêtes de C contribuent pour 0 à l'énergie tandis que les autres cellules contribuent pour 2 à l'énergie. Ainsi, l'énergie de la configuration c est égale $2|\mathbb{E}| - 2|C|$.

Trouver l'énergie de plus basse énergie revient à trouver la plus grande coupe. \square

Par conséquent, calculer l'énergie minimale d'un graphe est NP-difficile et il existe des configurations d'énergie nulle si et seulement si \mathbb{G} est biparti. Ces configurations sont les 2-coloriages de \mathbb{G} .

Proposition 9.7 (Variation de l'énergie) *Quand une cellule active i de potentiel v_i se met à jour dans une configuration d'énergie E , son potentiel devient $|V_i| - v_i + 1$, et l'énergie de la configuration devient $E + 2|V_i| - 4v_i + 2$.*

Preuve. Quand l'état d'une cellule i de potentiel v_i change, son nouveau potentiel est $|V_i| - v_i + 1$. Parmi ses voisines, $v_i - 1$ d'entre elles voient leur potentiel diminuer de 1 et $|V_i| - v_i$ voient leur potentiel augmenter de 1. Donc la variation totale d'énergie de la configuration quand une cellule de potentiel v_i change d'état est $2|V_i| - 4v_i + 2$. \square

Corollaire 9.8 (L'énergie est décroissante) *L'énergie est décroissante au cours du temps et elle décroît chaque fois qu'une cellule i de potentiel $> \frac{|V_i|}{2}$ se met à jour. Mettre à jour une cellule active de degré impair fait décroître l'énergie.*

Une mise à jour qui conserve l'énergie est réversible : la cellule qui a été mise à jour est restée active et la remettre à jour ramène à la configuration précédente. De même, une séquence de mises à jour ne faisant pas décroître l'énergie est réversible.

Corollaire 9.9 *Une configuration c appartient à l'ensemble limite si et seulement si il n'existe pas de séquences de mises à jour faisant décroître l'énergie, i.e., si et seulement si*

$$\forall t, P(E(c^t) > E(\delta(c^t)) | c^0 = c) = 0.$$

Preuve. Si une mise à jour faisant passer de la configuration c à la configuration c' fait décroître l'énergie, alors la configuration c ne sera plus jamais atteinte (l'énergie étant décroissante). \square

Comme mettre à jour des cellules de degré impair fait décroître l'énergie, ces cellules sont inactives dans l'ensemble limite. Nous allons maintenant définir la notion de frontière.

Définition 9.10 (Frontière) *Soit c une configuration sur $\mathbb{G} = (\mathbb{T}, \mathbb{E})$, une arête $\{i, j\}$ contient une frontière si $c_i \neq c_j$. Une configuration est entièrement caractérisée (à symétrie noir/blanc près) par l'ensemble de ses frontières.*

Notons que la proposition inverse “tout ensemble de frontières correspond à une configuration” n’est pas forcément vraie. En effet, considérons un cycle du graphe, alors le nombre de frontières contenues dans le cycle doit être de même parité que la longueur du cycle. L’énergie d’une configuration est égale à deux fois son nombre de frontières. En mettant à jour une cellule i active, les arêtes incidentes à cette cellule contenant une frontière la perdent, les autres arêtes incidentes en gagnent une (comme illustré sur la figure 9.1).

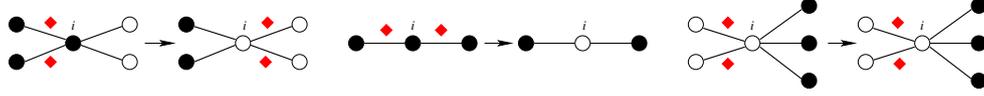


FIG. 9.1 – Transferts de frontières (points rouges) en mettant à jour la cellule i .

Passer du point de vue états de la configuration au point de vue placement des frontières peut simplifier la description de certaines configurations.

9.3 Graphe régulier

Dans cette partie nous étudions deux types de graphes réguliers : les anneaux et les cliques. Ces structures ne sont pas particulièrement dures à analyser mais fournissent néanmoins des renseignements intéressants sur Minorité. Nous commençons par analyser les cycles.

9.3.1 Cycle

Analyser Minorité sur un cycle revient à analyser une configuration $1D$ finie. Nous allons donc analyser l’ACE **ABCFGH** qui n’est pas doublement quiescent. L’intérêt de cette preuve vient du fait que nous allons faire une réduction à **BCDEFG** et montrer que ces deux automates sont équivalents quand la taille du cycle est paire.

Théorème 9.11 *En dynamique totalement asynchrone, Minorité atteint l’ensemble limite en $\Theta(N^3)$ (resp. $O(N^3)$) pas de temps en moyenne sur un cycle de taille N quand N est pair (resp. impair). Quand N est pair, l’ensemble limite est constitué de deux configurations stables et le temps de relaxation est donc $\Theta(N^3)$. Quand N est impair, l’ensemble limite est l’ensemble des configurations avec une seule frontière (configurations d’énergie 2).*

Preuve. Considérons une configuration torique $1D$ finie de taille N avec N pair. Minorité se traduit par : “une cellule est active si au moins une de ses deux voisines est dans le même état qu’elle”. Les configurations stables de cette configuration sont donc $(01)^{N/2}$ et $(10)^{N/2}$. Pour une configuration c nous définissons la configuration duale $\hat{c} = (10)^{N/2} \oplus c$. Entre une configuration c et sa duale \hat{c} une cellule sur deux change d’état. Ainsi la règle de transition sur la configuration duale devient : “une cellule est active si au moins une de ces deux voisines est dans un état différent du sien”. Il s’agit de la règle de l’automate **BCDEFG**(178). En couplant ces deux dynamiques et en utilisant la preuve de Fatès *et al* [27], nous obtenons que le temps de relaxation est $\Theta(N^3)$.

Si N est impair, alors une configuration c^t possède un nombre impair de frontières. Supposons qu’il y ait k frontières et numérotions les de 1 à k de gauche à droite, la configuration duale $\hat{c}^t(j)$ qui ignore la frontière j est définie comme suit :

- Renommer les frontières de 1 à $k - 1$ de gauche à droite en ignorant la frontière anciennement numérotée j ,
- construire une première configuration \hat{c} telle que les cellules entre les frontières i et $i + 1$ sont noires si i est pair et blanches sinon,

- construire une deuxième configuration c' telle que les cellules entre les frontières i et $i + 1$ sont blanches si i est pair et noires sinon,
- renvoyer parmi ces deux configurations, celles qui contiennent le moins de cellules noires.

Ainsi, la configuration duale est faite d'une alternance de régions blanches et noires. Maintenant, définissons le variant suivant :

$$\Psi(c^t) = E(c^t) + \min_{1 \leq j \leq k} (|\hat{c}(j)|_1).$$

Supposons que le minimum soit atteint en ignorant la frontière j , alors considérons la frontière $1 \leq i \leq k$:

- si $i = j$, alors déplacer la frontière ne peut que faire décroître l'énergie.
- si $i \neq j$: il existe une cellule adjacente à la frontière qui quand elle est mise à jour fait décroître le nombre de cellules noires dans le dual de 1 et l'autre cellule adjacente à la frontière fait éventuellement croître le nombre de cellules noires dans le dual de 1.

Notons que si deux frontières sont adjacentes à la même cellule noire dans le dual alors cette cellule est la cellule noire qui fait décroître le nombre de cellules noires dans le dual de 1 pour ces deux frontières. Mais, mettre à jour cette cellule fait aussi décroître l'énergie de 4. Ainsi $E(\Delta\Psi(c^t)) \leq 0$ et $P(|\Delta\Psi(c^t)| \geq 1|c^t) \geq \frac{1}{N}$ quand il y a strictement plus d'une frontière dans c^t . Par le lemme 1.46, l'espérance du temps pour atteindre une configuration d'énergie 2 est $O(N)^3$. \square

9.3.2 Clique

Nous allons maintenant prouver que Minorité se comporte comme un collectionneur de coupons sur les cliques.

Définition 9.12 (Clique) Une clique est un graphe où $\forall i, j \in \mathbb{T}$, il y a une arête entre i et j .

Le voisinage d'une cellule est \mathbb{T} . Donc toutes les cellules ont le même voisinage.

Fait 9.13 Toutes les cellules noires (resp. blanches) ont le même potentiel. Soit n_b le nombre de cellules noires d'une configuration c , l'énergie de c est

$$E(c) = n_b(n_b - 1) + (N - n_b - 1)(N - n_b - 1).$$

Théorème 9.14 En dynamique totalement asynchrone, Minorité atteint l'ensemble limite en $\Theta(N)$ pas de temps en moyenne sur une clique de taille N . Quand N est pair, l'ensemble limite est constitué de $\binom{N}{\frac{N}{2}}$ configurations stables d'énergie $\frac{N^2}{2} - N$ où la moitié des cellules sont noires et l'autre blanche. Si N est impair, l'ensemble limite est constitué d'un unique attracteur fait de $2\binom{N-1}{\frac{N-1}{2}}$ configurations d'énergie $\frac{(N-1)^2}{2}$ où la différence entre le nombre de cellules noires et le nombre de cellules blanches est égale à 1 ou à -1 .

Preuve. Soit n_b le nombre de cellules noires dans la configuration. Comme le voisinage d'une cellule est \mathbb{T} , le potentiel d'une cellule noire est n_b . Le potentiel d'une cellule blanche est $N - n_b$. Si $n_b > \frac{N+1}{2}$ (respectivement $n_b < \frac{N-1}{2}$) alors mettre à jour une cellule noire (respectivement blanche) décroît l'énergie et la configuration n'est pas dans \mathcal{A} . Si une configuration est dans \mathcal{A} alors $\frac{N-1}{2} \leq n_b \leq \frac{N+1}{2}$, considérons une telle configuration :

- Si N est pair alors toutes les cellules ont un potentiel $\frac{N}{2}$ et ces $\binom{N}{\frac{N}{2}}$ configurations sont stables.

- Si N est impair, nous posons C_b (resp. C_w) l'ensemble des configurations où $n_b = \frac{N+1}{2}$ (resp. $n_b = \frac{N-1}{2}$). L'ensemble des configurations d'énergie minimale est $C_w \cup C_b = \mathcal{A}$. Prouvons que \mathcal{A} est constitué d'un seul attracteur. Les cellules blanches (resp. noires) des configurations de C_b (resp. C_w) sont inactives et les cellules noires (resp. blanches) sont actives, mettre l'une de ces cellules actives à jour amène à une configuration de C_w (resp. C_b). Toute configuration de C_w peut devenir une configuration de C_b après une mise à jour et vice versa. Pour deux configurations c et c' , nous définissons la distance de c à c' comme $d(c, c') = |\{i | c_i \neq c'_i\}|$. Considérons deux configurations c et c' telle que $c, c' \in C_b$ et $c \neq c'$. Puisque c et c' ont le même nombre de cellules noires, il existe i et j tels que $c_i = 1, c'_i = 0, c_j = 0$ et $c'_j = 1$. Mettre à jour les cellules c_i puis c_j dans la configuration c amène à une configuration c'' et $d(c'', c') = d(c, c') - 2$. Donc pour toute configuration $c \in C_b \cup C_w$, il existe une séquence de mises à jour qui conduit à toute configuration $c' \in C_b \cup C_w$. L'ensemble $C_b \cup C_w$ est un attracteur de taille $2\binom{N}{\frac{N-1}{2}}$.

Maintenant considérons une trajectoire $(c^t)_{t \geq 0}$ et notons n_b^t le nombre de cellules noires au temps t . Pour tout temps t tel que $n_b^t > \frac{N+1}{2}$, la dynamique n'a pas atteint l'ensemble limite et les cellules noires sont actives. Il faut que $\lceil n_b^t - \frac{N+1}{2} \rceil$ cellules noires se mettent à jour pour que la dynamique atteignent \mathcal{A} . À chaque temps t , il y a une probabilité $\frac{n_b^t}{N}$ de mettre à jour une cellule noire. Nous sommes donc en présence d'un collectionneur de coupons, les pires configurations initiales sont tout-blanc ou tout-noir. Mais dans le pire des cas, il suffit seulement que $N/2$ cellules se mettent à jour pour atteindre l'ensemble limite, on a donc $E[T] = \sum_{i=0}^{N/2} \frac{N}{N-i}$ et donc $N \leq E[T] \leq 2N$. L'espérance du pire temps pour atteindre \mathcal{A} est $E[T] = \Theta(N)$. \square

9.4 Graphe biparti

Un graphe qui n'est pas connexe est composé de plusieurs parties évoluant indépendamment les unes des autres. Si nous savons étudier les différentes parties, nous savons étudier l'ensemble. Nous supposons donc maintenant que les graphes considérés sont connexes.

Définition 9.15 (Graphe biparti) *Un graphe $\mathbb{G} = (\mathbb{T}, \mathbb{E})$ est biparti s'il existe deux ensembles de sommets \mathbb{T}_1 et \mathbb{T}_2 tel que $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2$ et pour toute arête ij de \mathbb{E} , $i \in \mathbb{T}_1$ et $j \in \mathbb{T}_2$ (il n'existe pas d'arêtes entre deux sommets de \mathbb{T}_1 ou deux sommets de \mathbb{T}_2).*

Ces graphes sont les seuls graphes tels que \mathbb{E} soit une coupe du graphe et par le théorème 9.6, nous obtenons le résultat suivant :

Fait 9.16 *Un graphe admet des configurations d'énergie minimale nulle si et seulement si ce graphe est biparti. Ces configurations d'énergie nulle sont les deux 2-coloriages du graphe.*

L'existence d'une configuration d'énergie nulle est très importante, en effet ceci permet de définir une dynamique duale : la grille avec le voisinage de von Neumann est bipartie quand les deux dimensions sont paires mais pas quand l'une des deux dimensions est impaire. Nous allons maintenant définir une configuration duale sur un graphe biparti en faisant un XOR des configurations avec une des deux configurations d'énergie nulle.

Définition 9.17 (Configuration duale) *Considérons un graphe $\mathbb{G} = (\mathbb{T}, \mathbb{E})$ biparti. Soit \mathbb{T}_1 et soit \mathbb{T}_2 comme défini dans 9.15. Pour toute configuration c , sa configuration duale \hat{c} est définie comme $\hat{c}_i = c_i$ si $i \in \mathbb{T}_1$ et $\hat{c}_i = 1 - c_i$ si $i \in \mathbb{T}_2$. La projection $c \mapsto \hat{c}$ est une bijection sur l'ensemble des configurations : plus précisément $\hat{\hat{c}} = c$.*

Au niveau local d'une cellule, lors du passage du primal au dual, soit la cellule change d'état et toutes ses voisines restent dans le même état, soit la cellule reste dans le même état et toutes ses voisines changent d'état.

Définition 9.18 (Énergie et potentiel dans le dual) *Le potentiel \hat{v}_i d'une cellule i dans une configuration duale est le nombre de ses voisines dans un état différent du sien. Si $\hat{v}_i < \frac{|V_i|-1}{2}$ alors la cellule est dans l'état majoritaire et donc inactive ; tandis que, si $\hat{v}_i \geq \frac{|V_i|-1}{2}$ alors la cellule est active. L'énergie d'une configuration duale est l'énergie de la configuration primale.*

Soit une configuration c et son dual \hat{c} , le potentiel de toute cellule i de c est égale au potentiel dual de la cellule i dans \hat{c} plus un. L'énergie d'une configuration duale \hat{c} est donc égale à la somme des potentiels duaux de toutes ses cellules. Donc, il existe deux configurations duales d'énergie nulle qui sont les duales des configurations d'énergie nulle du primal.

Fait 9.19 (Configuration duale d'énergie nulle) *Dans la configuration duale, les configurations d'énergie nulle sont les configurations tout-blanc et tout-noir.*

Proposition 9.20 (Dynamique duale) *Nous définissons la fonction de transition duale $\hat{\delta}$ telle qu'une cellule i d'une configuration duale \hat{c} se mettant à jour passe dans l'état :*

$$\hat{\delta}(\hat{c}_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } \sum_{j \in V_i \setminus \{i\}} \hat{c}_j > \frac{|V_i|-1}{2} \text{ ou } (\sum_{j \in V_i \setminus \{i\}} \hat{c}_j = \frac{|V_i|-1}{2} \text{ et } \hat{c}_i = 0) \\ 0 & \text{if } \sum_{j \in V_i \setminus \{i\}} \hat{c}_j < \frac{|V_i|-1}{2} \text{ ou } (\sum_{j \in V_i \setminus \{i\}} \hat{c}_j = \frac{|V_i|-1}{2} \text{ et } \hat{c}_i = 1) \end{cases}$$

Cette règle s'interprète comme "majorité sans prendre en compte son état (la cellule est active en cas d'égalité)". Considérons deux trajectoires évoluant en dynamique totalement asynchrone : (c^t) régie par la règle δ et (\hat{c}^t) régie par la règle $\hat{\delta}$, telles que \hat{c}^0 soit la configuration duale de c^0 , ces deux trajectoires sont couplées de façon à ce que la même cellule se mette à jour dans les deux configurations pour chaque pas de temps t . Alors pour tout temps t , la configuration \hat{c}^t est le dual de la configuration c^t .

Le passage au dual ne permet pas de simplifier l'étude mathématique mais juste de mieux visualiser humainement ce qui se passe : les régions qui luttent pour s'étendre sur la configuration sont pavées uniformément au lieu d'être pavées par une alternance d'état noir/blanc.

9.5 Arbre

Nous allons maintenant étudier les arbres. Les arbres sont des graphes bipartis donc ils possèdent deux configurations d'énergie nulle et il est possible de définir une dynamique duale. Nous considérons maintenant que nous travaillons dans le dual. Nous allons également recourir à une notion particulière que nous avons présentée dans le cas de Minorité sur la grille avec le voisinage de Moore (voir chapitre 6) : il s'agit des particules. Dans le cas des arbres, cette notion est particulièrement simple, elle se confond avec la notion de frontières. Comme l'utilisation du dual, les particules permettent de mieux décrire le fonctionnement de Minorité sur les arbres.

Définition 9.21 (Particule) *Dans une configuration duale, une arête possède une particule si et seulement si elle relie deux sommets dans des états différents. On note l'ensemble des particules d'une configuration $P \subseteq \mathbb{E}$.*

Ainsi l'énergie est égale à deux fois le nombre de particules. Les notions de frontière et de particule se confondent car sur les arbres, les particules ont la propriété fondamentale suivante (qui n'est pas forcément vraie pour les frontières pour tout graphe) :

Fait 9.22 Une configuration est entièrement déterminée par P , à symétrie noir/blanc des états près.

Nous pouvons donc décrire les configurations en nous contentant de donner la position des particules. Dans ce chapitre, nous ne parlerons donc pas de frontières mais de particules.

Fait 9.23 (Mouvement des particules) Une cellule est active s'il y a des particules sur au moins la moitié de ses arêtes incidentes. Quand une telle cellule se met à jour, les arêtes incidentes à cette cellule possédant une particule la perdent et les autres en gagnent une.

9.5.1 Ensemble limite

Dans cette partie nous allons introduire un algorithme qui teste si une configuration est dans l'ensemble limite \mathcal{A} . Ensuite, nous allons définir un ordre total sur les configurations de l'ensemble limite. Ainsi chaque attracteur est caractérisé par l'élément maximal qu'il contient.

Définition 9.24 Considérons un arbre $\mathcal{T} = (\mathbb{T}, \mathbb{E})$, l'arbre réduit $\mathcal{T}' = (\mathbb{T}', \mathbb{E}')$ de \mathcal{T} est défini de la façon suivante :

- \mathbb{T}' est l'ensemble des sommets de \mathbb{T} de degré différent de 2,
- il existe une arête entre deux sommets i et j dans \mathbb{E}' si et seulement si le chemin entre i et j dans \mathcal{T} est constitué uniquement de sommets de degré 2.

Définition 9.25 (Corridor) Considérons un arbre \mathcal{T} , son arbre réduit \mathcal{T}' et deux sommets i et j de \mathcal{T}' . Le corridor \mathbb{P}_{ij} reliant i à j est l'ensemble des sommets reliant i à j dans \mathcal{T} (en incluant i et j).

À part les cellules i et j , toutes les cellules d'un corridor \mathbb{P}_{ij} sont de degré 2.

Fait 9.26 (Déplacement des particules sur un corridor) Considérons un arbre $\mathcal{T} = (\mathbb{T}, \mathbb{E})$, un corridor \mathbb{P}_{ij} de longueur l , nous renommons les sommets de \mathbb{P}_{ij} de 0 à $l-1$ tel que $i = 0$ et le sommet numéro k est à distance k de i , donc $j = l-1$. L'indice d'une particule est le numéro de son plus petit sommet adjacent. Si la cellule $1 \leq k \leq l-2$ se met à jour, selon la présence de particules en position $k-1$ et k , il se passe les événements suivants :

- si les deux particules d'indice $k-1$ et k sont présentes, alors elles disparaissent,
- si seulement la particule d'indice $k-1$ est présente, alors elle devient d'indice k ,
- si seulement la particule d'indice k est présente, alors elle devient d'indice $k-1$,
- si aucune particule n'est présente, alors la cellule n'est pas active.

Ainsi tant que les extrémités d'un corridor ne se mettent pas à jour, les cellules se déplacent comme des marches aléatoires dans ce corridor et disparaissent quand elles se rencontrent. Ces disparitions entraînent des baisses d'énergie.

Lemme 9.27 Une configuration appartenant à l'ensemble limite n'admet pas deux particules sur le même corridor.

Preuve. Considérons un arbre $\mathcal{T} = (\mathbb{T}, \mathbb{E})$ et un corridor \mathbb{P}_{ij} de cet arbre contenant deux particules. Reprenons les notations de 9.26 et considérons la particule de plus petit indice k et la particule de deuxième plus petit indice k' , mettre à jour les sommets dans l'ordre $k+1, k+2, \dots, k'$ fait décroître l'énergie et c n'est pas dans l'ensemble limite. \square

Définition 9.28 (Configuration réduite) *Considérons un arbre $\mathcal{T} = (\mathbb{T}, \mathbb{E})$ et son arbre réduit $\mathcal{T}' = (\mathbb{T}', \mathbb{E}')$. Soit c une configuration de \mathcal{T} qui ne possède qu'une seule particule par corridor, la configuration réduite de c est la configuration c^r de \mathcal{T}' telle qu'il existe une particule sur l'arête ij dans c^r si et seulement s'il existe une particule dans le corridor \mathbb{P}_{ij} dans c .*

Ainsi, l'énergie d'une configuration et l'énergie de sa configuration réduite sont égales puisqu'elles contiennent le même nombre de particules.

Lemme 9.29 *Considérons un arbre $\mathcal{T} = (\mathbb{T}, \mathbb{E})$ et son arbre réduit $\mathcal{T}' = (\mathbb{T}', \mathbb{E}')$. Soit c une configuration de \mathcal{T} appartenant à l'ensemble limite, et c^r sa configuration réduite. Soit c' la configuration obtenue en mettant à jour la cellule active $i \in \mathcal{T}$ dans c :*

- si $i \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}'$, alors c^r est la configuration réduite de c' .
- si $i \in \mathcal{T}'$, alors la configuration réduite de c est la configuration obtenue en mettant à jour la cellule i dans c^r .

Soit $c^{r'}$ la configuration obtenue en mettant à jour la cellule active $i \in \mathcal{T}'$ dans c^r , alors il existe une séquence de mises à jour dans \mathcal{T} qui transforme c en c'' telle que la configuration réduite de c'' soit $c^{r'}$.

Preuve. Considérons un arbre $\mathcal{T} = (\mathbb{T}, \mathbb{E})$ et son arbre réduit $\mathcal{T}' = (\mathbb{T}', \mathbb{E}')$. Soit c une configuration de \mathcal{T} appartenant à l'ensemble limite, et c^r sa configuration réduite. Soit c' la configuration obtenue en mettant à jour la cellule active $i \in \mathcal{T}$, de degré k , dans c :

- si $i \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}'$, alors par le fait 9.26, la particule reste dans le même corridor.
- si $i \in \mathcal{T}'$, alors notons k le degré de i . Puisque c est dans l'ensemble limite, k est pair et il y a exactement $k/2$ particules sur les arêtes adjacentes à i . Toutes ces arêtes appartiennent à des corridors différents et donc les $k/2$ arêtes de \mathcal{T}' correspondant à ces corridors possèdent une particule dans c^r . La cellule i est donc active dans c^r , supposons par l'absurde que dans c^r , elle possède strictement plus de $k/2$ particules sur ses arêtes incidentes, alors dans c il existe j tel que \mathbb{P}_{ij} possède une particule qui n'est pas sur l'arête incidente à i et en mettant à jour i dans c , \mathbb{P}_{ij} possède deux particules, ce qui par le lemme 9.27 contredit le fait que c est dans l'ensemble limite. Donc c^r possède exactement $k/2$ particules et en mettant i à jour on obtient la configuration réduite de c' .

Soit $c^{r'}$ la configuration obtenue en mettant à jour la cellule active $i \in \mathcal{T}'$ dans c^r . La configuration c se transforme en configuration c'' , telle que la configuration réduite de c'' soit $c^{r'}$, par la séquence de mises à jour suivante :

- Pour les $k/2$ corridors \mathbb{P}_{ij} contenant une particule, ramener la particule pour qu'elle soit sur l'arête adjacente à i (en utilisant le lemme 9.26)
- mettre i à jour.

□

Puisque c et c^r ont la même énergie et que l'existence d'une séquence de mises à jour dans une de ces deux configurations entraîne l'existence d'une telle séquence dans l'autre configuration :

Corollaire 9.30 *Soit un arbre $\mathcal{T} = (\mathbb{T}, \mathbb{E})$, son arbre réduit $\mathcal{T}' = (\mathbb{T}', \mathbb{E}')$, une configuration c de \mathcal{T} ne possédant qu'au plus une particule par corridor et c^r la configuration réduite de c , si c appartient à l'ensemble limite de \mathcal{T} alors c^r est dans l'ensemble limite de \mathcal{T}' , la réciproque est également vraie. Soit A l'attracteur qui contient c et A^r l'attracteur qui contient c^r , alors l'ensemble des configurations réduites de A est A^r .*

Corollaire 9.31 *Il existe une bijection entre les attracteurs de \mathcal{T} et les attracteurs de \mathcal{T}' .*

Nous présentons maintenant un algorithme testant si une configuration est dans l'ensemble limite. De cet algorithme se déduit une condition nécessaire et suffisante pour caractériser une configuration de l'ensemble limite, malheureusement, cette condition n'est pas facilement exprimable. Heureusement, caractériser les attracteurs se révèle plus simple.

Théorème 9.32 (Configuration de l'ensemble limite) *Considérons un arbre $\mathcal{T} = (\mathbb{T}, \mathbb{E})$ et son arbre réduit $\mathcal{T}' = (\mathbb{T}', \mathbb{E}')$. Soit c une configuration de \mathcal{T} et c' sa configuration réduite. L'algorithme suivant permet de certifier si c est dans l'ensemble limite :*

1. vérifier que les corridors de c ne contiennent pas deux particules,
2. Dans c' , noter toutes les cellules comme "À étudier",
3. tant qu'il reste des cellules actives annotées "À étudier", en sélectionner une et faire :
 - si strictement plus de la moitié des arêtes incidentes à ce sommet possèdent une particule alors l'algorithme s'arrête et renvoie que la configuration c n'est pas dans l'ensemble limite,
 - sinon annoter cette cellule comme "étudiée" et rajouter des particules sur toutes les arêtes incidentes à ce sommet qui n'en possédaient pas,
4. la configuration est dans l'ensemble limite

Preuve. Si l'algorithme renvoie que la configuration n'est pas dans l'ensemble limite :

- soit il existe deux particules dans un corridor et la configuration n'est pas dans l'ensemble limite,
- soit, posons i la cellule où l'algorithme a terminé. Posons \mathcal{T}^a le sous-arbre de \mathcal{T}' enraciné en i qui contient les sommets :
 - annotés "Étudié" par l'algorithme,
 - dont le chemin les reliant à i ne possède pas de particule dans c' .

Considérons \mathcal{S} la séquence de cellules de \mathcal{T}' correspondant à un parcours en profondeur de \mathcal{T}^a et la séquence \mathcal{S}' qui est la séquence miroir de \mathcal{S} . Si nous mettons les cellules de c' à jour suivant \mathcal{S}' , alors à chaque fois qu'une cellule se met à jour, elle possède autant de particules sur ses arêtes qu'au moment où elle a été "étudiée" par l'algorithme et elle est donc active. Au final la mise à jour de i fait décroître l'énergie de c' et, par le lemme 9.30, la configuration c n'est pas l'ensemble limite.

Si la configuration c n'est pas stable alors il existe une séquence \mathcal{S} de mises à jour de taille l faisant décroître l'énergie. Nous considérons que la première baisse d'énergie a lieu lors de la dernière mise à jour de \mathcal{S} et se produit sur la cellule i . Soit \mathcal{S}' la séquence de mises à jour extraite de \mathcal{S} telle qu'une cellule j de \mathcal{S} soit dans \mathcal{S}' si et seulement si l'arête incidente à j qui appartient au chemin reliant j à i ne contient pas de particules. La séquence \mathcal{S}' ne contient pas deux fois la même cellule puisque quand une cellule se met à jour, elle rajoute une particule sur l'arête appartenant au chemin reliant cette cellule à i . De plus, si nous mettons les cellules à jour dans l'ordre de \mathcal{S}' , elles ont toujours au moins autant de particules dans leur voisinage que lorsqu'elles sont mises à jour dans \mathcal{S} . Donc mettre à jour la configuration c en suivant la séquence \mathcal{S}' provoque une baisse d'énergie. Quand l'algorithme aura étudié toutes les cellules de \mathcal{S}' , il aura détecté la baisse d'énergie et donc retournera que la configuration n'est pas dans l'ensemble limite. \square

Par le corollaire 9.31, pour déterminer les attracteurs de \mathcal{T} , il suffit de déterminer les attracteurs de \mathcal{T}' . Donc jusqu'à la fin de cette section, nous considérons que les arbres que nous étudions sont sous leur forme réduite.

Définition 9.33 *Soit \mathcal{T} un arbre sous forme réduite et \mathcal{S} un parcours en largeur de \mathcal{T} . Nous associons à chaque configuration c de l'ensemble limite le mot \mathcal{S}^c de longueur $|\mathcal{T}'|$ tel que $\mathcal{S}_i^c = 1$*

si l'arête de c^r correspondant à S_i contient une particule et 0 sinon. Nous définissons un ordre sur les configurations en considérant l'ordre lexicographique sur leur mot.

Selon cet ordre, une configuration est de plus haut niveau si et seulement si ses particules sont le plus proche possibles de la racine. Puisque l'ordre lexicographique est total :

Théorème 9.34 *Pour tout attracteur A , il existe une unique configuration maximale dans A .*

Ainsi on peut caractériser un attracteur par sa configuration maximale. Pour créer une configuration maximale, il suffit de placer les particules selon un parcours en largeur de l'arbre et de vérifier à chaque fois qu'une particule est rajoutée que la configuration reste une configuration dans l'ensemble limite.

9.5.2 Temps de relaxation sur les arbres

Arbre de degré maximum ≤ 3

Les arbres de degré borné par 3 ont la particularité que leur arbre réduit contient seulement des nœuds de degré impair et donc par la remarque 9.8, une configuration réduite de l'ensemble limite est stable.

Théorème 9.35 *Sur les arbres de degré au plus 3, Minorité atteint l'ensemble limite en $O(N^4)$ pas de temps en espérance. Une configuration réduite dans l'ensemble limite est stable.*

Preuve. Supposons qu'une configuration c possède une particule sur un corridor \mathbb{P}_{ij} où i est une feuille, alors si une des extrémités est active et se met à jour, l'énergie décroît. Au bout d'un temps $O(N^3)$ en espérance, si la cellule j ne s'est pas mise à jour avant, la cellule atteint l'arête incidente à la feuille i qui devient active et sa mise à jour fait décroître l'énergie.

Supposons qu'une configuration c possède plus de deux particules sur le même corridor, alors si une des extrémités est active et se met à jour, l'énergie décroît, sinon au bout d'un temps $O(N^3)$ en espérance deux particules se rencontrent et provoquent une baisse d'énergie. Donc au bout d'une temps $O(N^3)$ en espérance l'énergie décroît.

Supposons qu'il existe des cellules i, j, k de l'arbre réduit telles que \mathbb{P}_{ij} et \mathbb{P}_{ik} contiennent chacun une particule. Dans ce cas, si j ou k est active et se met à jour l'énergie décroît, sinon si les deux particules se rassemblent sur les arêtes incidentes à i , cette cellule devient active et la mettre à jour fait décroître l'énergie. Cet événement se produit en $O(N^3)$ pas de temps en moyenne d'après une étude des marches aléatoires [42].

L'énergie décroît au plus $O(N)$ fois avant d'atteindre une configuration c telle que :

- un corridor contient au plus une particule. Nous pouvons donc définir une configuration réduite c^r ,
- dans c^r , les cellules de degré 3 possèdent au plus une particule sur leurs arêtes adjacentes et elles donc sont inactives,
- les sommets de degré 1, les feuilles, ne possèdent pas de particule sur leur arête adjacente et elles sont donc inactives,

Ainsi c^r est stable et la configuration c est dans l'ensemble limite. La dynamique atteint l'ensemble limite en $O(N^4)$ pas de temps en espérance \square

Arbre de degré maximum ≥ 4

Dans cette partie, nous introduisons les *arbres biaisés* (définition 9.38 et figure 9.3) tels que la dynamique $\hat{\delta}$ converge en temps exponentiel sur cette topologie (Théorème 9.45). Les sommets d'un arbre biaisé ont un degré au plus 4. En fait, les arbres biaisés simulent des marches aléatoires biaisées (définition 9.36) convergeant en temps exponentiel. Les arbres biaisés sont créés à partir de petits arbres appelés *gadgets* (définition 9.37 et figure 9.2) placés sur une ligne. À part pour les extrémités, cette ligne de gadgets est faite de *portes*. Selon la configuration, ces portes sont soit *verrouillées*, soit *déverrouillées*, soit *stables* (définition 9.39). Sur une configuration *correcte* (définition 9.40), la ligne de portes est coupée en deux parties : toutes les portes du côté gauche sont stables et toutes les portes du côté droit sont *instables* (verrouillées ou déverrouillées). Dans une configuration correcte, trois événements peuvent se produire avec la même probabilité $1/N$ (fait 9.41 et corollaire 9.44) :

- la porte stable la plus à droite devient déverrouillée,
- la porte instable la plus à gauche devient stable si elle était instable.
- la porte instable la plus à gauche passe de verrouillée à déverrouillée (ou le contraire).

Ainsi les portes stables ont tendance à disparaître. Cette dynamique converge à long terme vers une configuration stable \hat{c}_f (définition 9.42). Pour atteindre cette configuration, il faut au préalable que toutes les portes soient stables. Ceci prend un temps exponentiel en fonction du nombre de portes et le temps de relaxation de $\hat{\delta}$ est exponentiel sur une configuration initiale correcte.

Définition 9.36 (Marche aléatoire biaisée) *Dans cette section, nous désignons par marche aléatoire biaisée un processus stochastique $(X_i)_{i \geq 0}$ défini sur $\{0, \dots, n\}$ tel que $X_0 = 0$ et pour tout $i \geq 0$, il existe $a, b \in \mathbb{R}_+$:*

- $P(X_{i+1} = 1 \mid X_i = 0) = 1$ (barrière réfléchissante en 0),
- $P(X_{i+1} = n \mid X_i = n) = 1$ (barrière absorbante en n),
- si $0 < x < n$,

$$P(X_{i+1} = x - 1 \mid X_i = x) + P(X_{i+1} = x + 1 \mid X_i = x) = 1$$

et

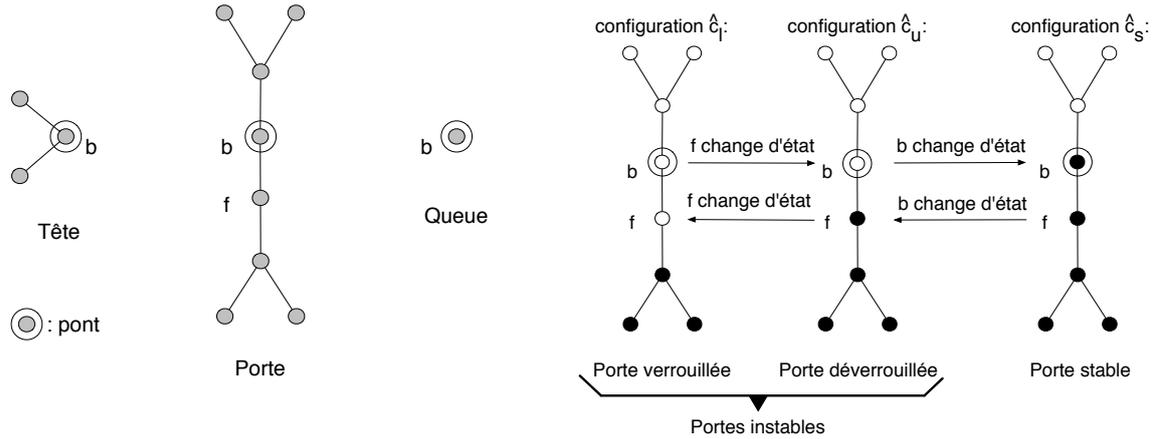
$$0 < a < P(X_{i+1} = x + 1 \mid X_i = x) < a' < 1/2.$$

Soit $T = \min\{i \mid X_i = n\}$, alors $E[T] = O(\psi(a))$ et $E[T] = \Omega(\psi(a'))$ où $\psi(p) = \frac{2p(1-p)}{(1-2p)^2} \left(\left(\frac{1-p}{p} \right)^n - 1 \right) - \frac{n}{1-2p}$.

Définition 9.37 (Gadget) *Un gadget W est un arbre $\mathcal{T} = (\mathbb{T}, \mathbb{E}, b)$ où $b \in \mathbb{T}$ est appelé le pont. Nous considérons les trois gadgets définis dans la figure 9.2.a : la tête, la porte et la queue et les trois configurations duales $\hat{c}_l, \hat{c}_u, \hat{c}_s$ sur ces portes.*

Définition 9.38 (Arbre biaisé) *Soit $(W_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ une séquence finie de gadgets où $W_i = (\mathbb{T}_i, \mathbb{E}_i, b_i)$. À partir de cette séquence, nous définissons l'arbre $\mathcal{T} = (\mathbb{T}, \mathbb{E})$ où $\mathbb{T} = \cup_{i=0}^{n+1} \mathbb{T}_i$ et $\mathbb{E} = (\cup_{i=0}^{n+1} \mathbb{E}_i) \cup (\cup_{i=0}^n b_i b_{i+1})$. Abusivement, nous dénotons aussi par $(W_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ l'arbre engendré par cette séquence. Un arbre biaisé de taille n est une séquence finie de gadgets $(W_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ où W_0 est une tête, pour tout $1 \leq i \leq n$, W_i est une porte et W_{n+1} est une queue.*

Définition 9.39 (Portes stables et instables) *Considérons un arbre biaisé $(W_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ et une configuration duale \hat{c} . Nous notons par \hat{c}_{W_i} , la restriction de \hat{c} au gadget W_i . nous disons que la porte i est verrouillée si $\hat{c}_{W_i} = \hat{c}_l$, déverrouillée si $\hat{c}_{W_i} = \hat{c}_u$ et stable si $\hat{c}_{W_i} = \hat{c}_s$. Une porte est instable si elle est verrouillée ou déverrouillée.*



9.2.a – Les 3 gadgets utilisés dans la construction des arbres biaisés. Les cellules sont grisées pour représenter le fait que nous ne leur avons pas assigné d'état.

9.2.b – Les trois configurations duales \hat{c}_l, \hat{c}_u et \hat{c}_s .

FIG. 9.2 – Les gadgets utilisés dans la construction des arbres biaisés.

Définition 9.40 (Configuration correcte) Une configuration duale \hat{c} est correcte si les cellules de sa tête sont noires, celle de sa queue est blanche, et qu'il existe j tel que pour tout $1 \leq i \leq j$ la porte i est stable, et pour tout $j < k \leq n$ la porte k est instable. Nous disons que la configuration \hat{c} est en position j . Soit $Pos(\hat{c})$ la position de la configuration \hat{c} . La position est déverrouillée si $j = n$ ou si la porte $j + 1$ est déverrouillée, la position est verrouillée autrement.

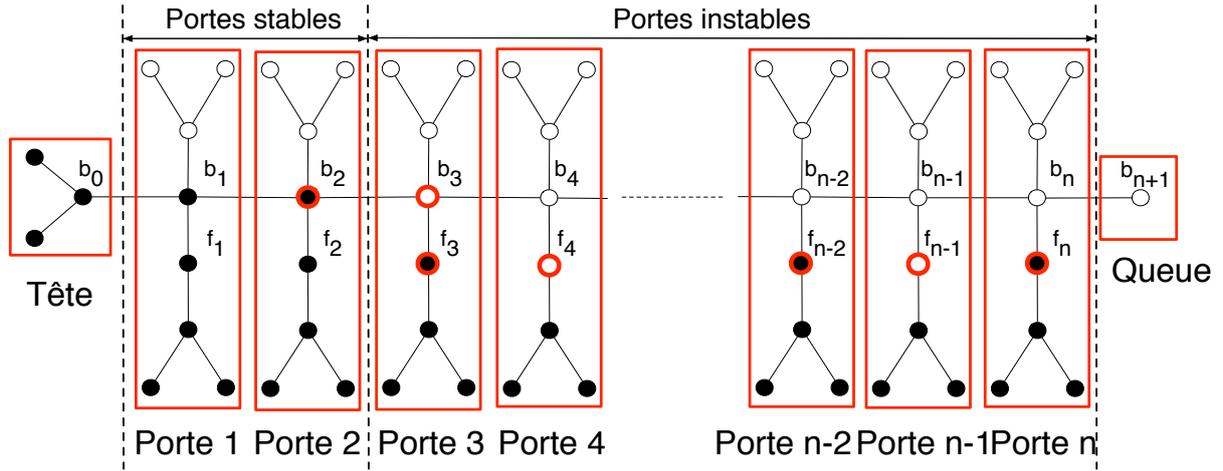
Fait 9.41 (Cellule active) Considérons la configuration correcte \hat{c} en position j . Les cellules actives de \hat{c} sont :

- la cellule b_j si $j \neq 0$,
- la cellule b_{j+1} si $j \neq n$ et si la porte W_{j+1} est déverrouillée.
- la cellule f_i si $j < i \leq n$.
- la cellule b_{n+1} si $j = n$.

Preuve. Considérons une configuration correcte \hat{c} en position j . Les seules cellules qui peuvent être actives sont les cellules b_i et f_i pour tout $1 \leq i \leq n$ et la cellule b_{n+1} . La cellule b_{n+1} est active si et seulement si $\hat{c}(b_n) = 1$ c'est à dire que la porte W_n est stable. Pour tout $1 \leq i \leq n$, la cellule f_i est active si et seulement si W_i est instable c'est à dire $j < i \leq n$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, la cellule b_i est inactive si $\hat{c}(b_{i-1}) = \hat{c}(b_i) = \hat{c}(b_{i+1})$. Donc parmi les cellules $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$, seules b_j et b_{j+1} peuvent être actives : la cellule b_j est active et la cellule b_{j+1} est active si la porte W_{j+1} est déverrouillée. \square

Définition 9.42 (Configuration finale) La configuration finale \hat{c}_f est la configuration où toutes les cellules de la tête sont noires, la queue est noire et toutes les portes sont stables. Nous disons que \hat{c}_f est en position $n + 1$, $Pos(\hat{c}_f) = n + 1$.

Lemme 9.43 La configuration duale \hat{c}_f est stable et elle est atteignable depuis toute configuration correcte.



○ : Cellule active

FIG. 9.3 – Un arbre biaisé et une configuration duale correcte en position déverrouillée 2.

Preuve. Toutes les cellules sont inactives dans \hat{c}_f et la configuration est stable. Considérons une configuration correcte \hat{c} en position j . Selon le fait 9.41, il est possible, pour tout $j < k \leq n$, de déverrouiller la porte W_k : si la porte est verrouillée, il suffit de mettre à jour la cellule f_k . Une fois toutes ces portes déverrouillées, il suffit de mettre à jour les $n - j + 1$ cellules $b_{j+1}, b_{j+2}, \dots, b_{n+1}$ dans cet ordre. \square

Corollaire 9.44 *Considérons une configuration duale correcte \hat{c} , alors la configuration $\hat{c}' = \hat{\delta}(\hat{c})$ est soit correcte, soit \hat{c}_f . De plus, $|\text{Pos}(\hat{c}') - \text{Pos}(\hat{c})| \leq 1$.*

Preuve. Considérons une configuration duale correcte \hat{c} en position j et la configuration $\hat{c}' = \hat{\delta}(\hat{c})$. si une cellule inactive se met à jour alors $\hat{c}' = \hat{c}$. Maintenant, considérons qu'une cellule active se mette à jour (voir le fait 9.41) :

- si $j \neq 0$ et la cellule b_j est celle qui se met à jour : alors la porte W_j passe de stable à déverrouillée et \hat{c}' est une configuration correcte en position déverrouillée $j - 1$.
- si $j \neq n$ et la cellule b_{j+1} est celle qui se met à jour : alors la porte W_{j+1} passe de déverrouillée à stable et \hat{c}' est une configuration correcte en position $j + 1$.
- si la cellule f_i est celle qui se met à jour avec $j < i \leq n$: alors la porte W_i passe de verrouillée à déverrouillée et réciproquement. La configuration \hat{c}' reste correcte et en position j .
- si $j = n$ et la cellule b_{n+1} est celle qui se met à jour : alors $\hat{c}' = \hat{c}_f$.

\square

Théorème 9.45 *Sur les arbres biaisés de taille n (i.e. $N = 8n + 4$ cellules), quand la configuration duale initiale est correcte, Minorité converge presque sûrement vers c^f . De plus son temps de relaxation T est $\Theta(1.5^n) \leq E[T] \leq \Theta(n4^n)$.*

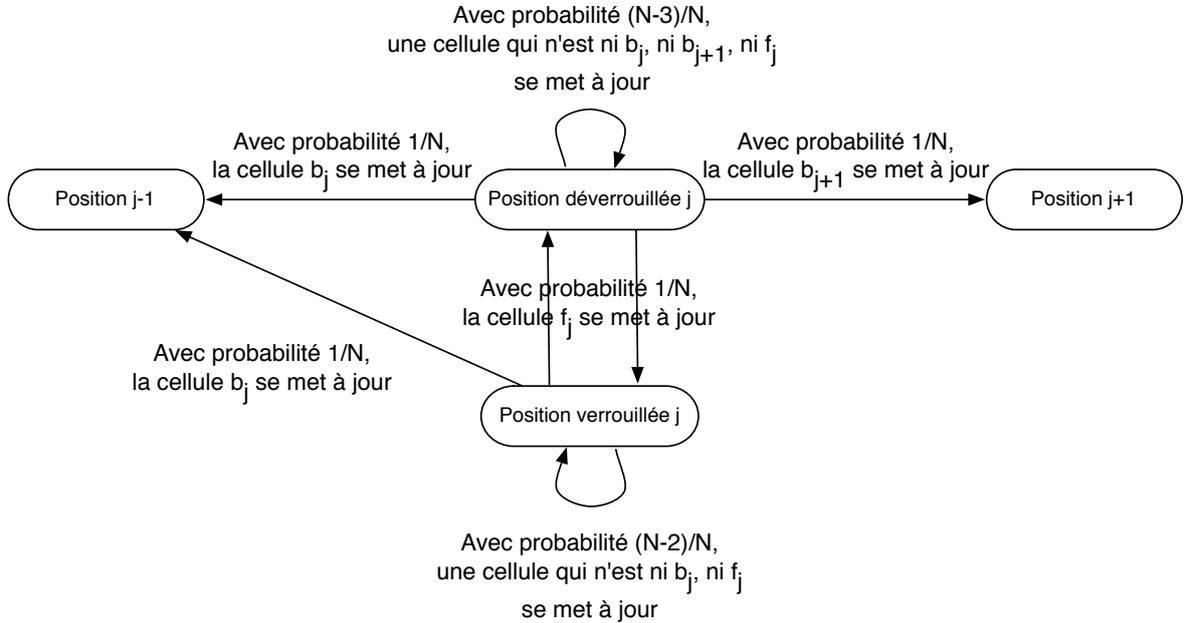
Preuve. Considérons un arbre biaisé de taille n . Comme

- par le lemme 9.44, après un pas de temps, une configuration correcte est soit correcte, soit \hat{c}_f ,
- par le lemme 9.43, toute configuration correcte peut atteindre \hat{c}_f ,
- l'ensemble des configurations correctes est fini,

la dynamique $\hat{\delta}$ converge presque sûrement vers \hat{c}_f depuis toute configuration duale initiale correcte.

Supposons que la configuration initiale soit la configuration duale correcte \hat{c}^0 en position 0. Considérons la séquence $(\hat{c}^t)_{t \geq 0}$. Nous définissons la séquence de variables aléatoires $(t_i)_{i \geq 0}$ comme $t_0 = 0$ et $t_{i+1} = \min\{t > t_i \mid \text{Pos}(\hat{c}^{t_{i+1}}) \neq \text{Pos}(\hat{c}^{t_i}) \text{ ou } \text{Pos}(\hat{c}^{t_{i+1}}) = n + 1\}$. Considérons la suite de variables aléatoires $(X_i)_{i \geq 0}$ telle que $X_i = \text{Pos}(\hat{c}^{t_i})$. Selon le corollaire 9.44, $|X_{i-1} - X_i| = 1$.

Considérons une configuration \hat{c}^t en position verrouillée $n > j > 0$ alors mettre à jour b_j mène à une configuration en position $j - 1$ et mettre à jour la cellule f_j mène à une configuration en position déverrouillée j . Mettre à jour d'autres cellules ne modifie pas la position de la configuration. Considérons la configuration \hat{c}^t en position déverrouillée $n > j > 0$ alors mettre à jour la cellule b_j mène à une configuration en position $j - 1$, mettre à jour la cellule f_j mène à une configuration en position verrouillée j et mettre à jour b_{j+1} mène à une configuration en position $j + 1$. Mettre à jour d'autres cellules ne modifie pas la position de la configuration. Une cellule a une probabilité $1/N$ de se mettre à jour où $N = 4 + 8n$. Donc, l'évolution d'une configuration en position $0 < j < n$ peut être résumée par :



Une simple analyse donne que :

- si $1 \leq x \leq n$ alors $P(X_{i+1} = x + 1 \mid X_i = x) = 1 - P(X_{i+1} = x - 1 \mid X_i = x)$ et $1/5 \leq P(X_{i+1} = x + 1 \mid X_i = x) \leq 2/5$.
- $P(X_{i+1} = 1 \mid X_i = 0) = 1$.
- $P(X_{i+1} = n + 1 \mid X_i = n + 1) = 1$.

Donc le comportement du processus stochastique $(X_i)_{i \geq 0}$ est comme décrit dans la définition 9.36.

Posons $T' = \min\{i : X_i = n\}$ la variable aléatoire qui correspond à la première fois que toutes les portes sont stables. Alors $E[T'] = \Omega((\frac{3}{2})^n)$ et $E[T'] = O(4^n)$ (voir définition 9.36).

Soit c^{f-1} la configuration correcte en position n (*i.e.* toutes les portes sont stables mais la queue est blanche). Alors $c^T = c^f$, $c^{T-1} = c^{f-1}$ et $P(c^{t+1} = c^f \mid c^t = c^{f-1}) = 1/2$. Donc, $E[T] = \Theta(E[t_{T'}])$. Par définition, $t_{T'} = \sum_{i=1}^{T'} (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} [(t_i - t_{i-1}) \mathbf{1}_{t_i < T'}]$. Puisque qu'il a au plus deux cellules qui peuvent modifier la position d'une configuration correcte, nous avons $1 \leq E[t_{i+1} - t_{i-1}] \leq \Theta(n)$. Donc, $\sum_{i=1}^{\infty} (1_{t_i < T'}) \leq E[t_{T'}] \leq \Theta(\sum_{i=1}^{\infty} (n \mathbf{1}_{t_i < T'}))$. Nous concluons que $E[T] = \Omega((\frac{3}{2})^n)$ et $E[T] = O(n4^n)$. \square

9.6 Conclusion

Nous avons réussi à généraliser la plupart des notions (potentiel, énergie, frontière, duale) introduites dans la deuxième partie. Maintenant, nous sommes capables de définir le dual sur tout graphe biparti. Il doit être possible de généraliser l'étude de la baisse brutale d'énergie mais nous n'avons pas encore exploré cette voie. Nous avons montré que Minorité peut adopter des comportements très différents selon la topologie :

- collectionneur de coupons (clique),
- marche aléatoire non biaisée (cycle),
- marche aléatoire biaisée avec convergence rapide (grille avec voisinage de von Neumann),
- marche aléatoire biaisée avec convergence lente (arbre biaisé).

L'étude des arbres a fait apparaître des particules, notion que nous n'avions pas utilisé dans l'étude de la grille $2D$ avec le voisinage de von Neumann dans le chapitre 7. Ces particules se déplacent sur la configuration et deux d'entre elles doivent se rencontrer pour faire décroître l'énergie. Cette notion est très simplifiée comparée à ce que nous avons observé sur la grille avec le voisinage de Moore car dans le cas des arbres, les particules permettent de décrire entièrement la configuration, tandis que sur la grille avec le voisinage de Moore, il faut commencer par décrire la structure du réseau des rails, ce qui est déjà un challenge en soit, avant de pouvoir parler de particules.

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse nous avons présenté le comportement des automates cellulaires en dynamiques asynchrones. Durant nos travaux, nous avons alterné entre des phases d'expérimentations, d'élaborations de preuves et de formalisations de concepts. Nous avons étudié de nombreux automates pour découvrir qu'elles sont les particularités engendrées par ces dynamiques. Une phase expérimentale nous a permis d'isoler les comportements intéressants et de formuler des conjectures. Pour prouver ces conjectures, nous avons eu besoin de comprendre plus en détail le fonctionnement de l'automate considéré. Les preuves nous ont permis d'exhiber des configurations ou des comportements pathologiques exacerbant le rôle d'un phénomène et ceci nous a permis de définir correctement les notions concernées. Formaliser ces notions nous a permis de simplifier les preuves, de les automatiser et de décider des prochaines simulations à faire pour progresser en découvrant le phénomène suivant.

Une fois qu'une notion est bien maîtrisée et définie sur un automate, il est généralement rapide d'obtenir des résultats similaires sur les automates qui présentent un comportement proche de l'automate étudié. Nous avons observé de nombreux comportements différents. La formalisation des phénomènes est un problème difficile en soi. Définir correctement un outil ou une notion n'est pas simple. Mais, grâce au développement progressif et au perfectionnement de nos outils et à la formalisation de notions-clés, nous avons réussi à analyser en partie ou en totalité de nombreux automates. Mais il en reste encore plusieurs dont nous ne connaissons le comportement qu'expérimentalement et dont la formalisation des mécanismes intervenant dans leur évolution reste à faire.

10.1 La dimension 1

En dimension 1, nous avons étudié la classe des automates cellulaires élémentaires doublement quiescents en dynamique α -asynchrone. Pour analyser ces automates, nous avons développé les bases de masques qui permettent d'analyser un comportement global par des considérations locales. Dans un premier temps, celles-ci nous ont permis de trier les automates considérés entre ceux présentant un comportement proche de celui d'une marche aléatoire et ceux présentant un comportement plus complexe et dont l'analyse nécessite des efforts conséquents. Le comportement des automates présentant un comportement proche de celui d'une marche aléatoire est relativement semblable à celui en dynamique totalement asynchrone. Seul l'automate **BEF** présente un changement brutal de comportement entre la dynamique totalement asynchrone (celui d'une marche aléatoire non biaisée) et la dynamique α -asynchrone (marche aléatoire biaisée) et cela dès qu'un peu d'asynchronisme est introduit. Ceci est dû à de nouveaux phénomènes qui n'apparaissent que sous la dynamique α -asynchrone que nous avons exhibé. Ensuite, nous avons consacré nos efforts sur deux automates présentant un comportement complexe : l'automate **BCF** et l'automate **BCDEFG**.

L'automate **BCF** a la particularité de faire interagir un grand nombre de phénomènes différents dans son comportement. En isolant ces phénomènes et leurs actions, nous avons

réussi à comprendre le fonctionnement de l'automate **BCF** quand $\alpha \geq 0.99990$. Révéler ces observations globales à partir des considérations locales s'est révélé difficile mais néanmoins faisable grâce au formalisme des bases de masques. La borne que nous avons fixée nous a permis de négliger les interactions à longue distance entre les différentes régions de l'automate. Expérimentalement, cet automate ne présente pas de transition de phase et son temps de relaxation semble linéaire en la taille de la configuration pour toute valeur de α . Actuellement, même intuitivement nous ne savons pas pourquoi cette convergence est si rapide quand α est proche de 0 et cet automate présente encore des mécanismes que nous n'avons pas su identifier.

Ensuite nous avons étudié l'automate **BCDEFG** qui présente une transition de phase. Il s'agit d'un comportement particulièrement complexe que nous n'avons pas réussi à analyser par des considérations locales. Grâce à un couplage avec la percolation dirigée, nous avons montré une correspondance en ces deux systèmes et nous avons pu prouver qu'une configuration infinie avec une seule cellule noire diverge avec une probabilité strictement positive quand $\alpha > 0.996$. En rapprochant le comportement de cet automate de celui d'un modèle de percolation dirigée qui, malgré de nombreux efforts, n'est pas encore totalement maîtrisé, nous avons montré la complexité de cet automate. De plus en s'appuyant sur les travaux de Mossel et Roch [64], cette preuve devrait facilement être adaptable sur les configurations finies. Également, il reste à analyser cet automate quand α est proche de 0 pour prouver formellement l'existence de cette transition de phase.

10.2 La dimension 2

10.2.1 Étude expérimentale

En dimension 2, nous avons étudié un type de transition de phase partagé par plusieurs automates :

1. en dynamique synchrone, différentes régions, dont la forme dépend de la configuration initiale, se stabilisent dans la configuration et l'automate atteint un comportement cyclique,
2. quand α est proche de 1, le comportement reste semblable au comportement synchrone lors des premiers pas de temps. Mais à court terme, un bruit aléatoire apparaît et érode les différentes régions. Ceci efface les informations apportées par la configuration initiale. À très long terme (jamais observé expérimentalement), l'automate atteint une configuration stable s'il en existe une ou un ensemble limite non trivial,
3. quand α est proche de 0 et en dynamique totalement asynchrone, des motifs apparaissent et forment de nouvelles régions qui fusionnent, luttent pour s'étendre sur la configuration. À plus moins long terme selon l'automate, la dynamique atteint l'ensemble limite quand une région a réussi à s'étendre sur toute la configuration.

La dynamique synchrone (premier point) de ces automates a déjà été étudié par Golès [38]. Faute de temps, nous n'avons pas étudié le point 2. Une première approche consisterait à analyser une dynamique presque synchrone où toutes les cellules sauf une se mettent à jour. Sinon ce type de comportement présente des similarités avec les travaux de Toom [87] sur la conservation de données par des automates cellulaires en présence d'erreurs. Nous nous sommes donc concentrés sur le point 3 et en particulier sur la dynamique totalement asynchrone.

Nous avons choisi d'analyser un automate particulier qui est l'un des plus simplement défini : Minorité. Nous avons obtenu de nombreux résultats qui devraient pouvoir se généraliser à tous les automates présentant ce comportement. Faute de temps nous ne l'avons pas encore fait mais nous travaillons actuellement dans cette direction.

10.2.2 Minorité 2D

En dynamique totalement asynchrone, nous avons développé une méthodologie permettant de comprendre le fonctionnement de Minorité durant les premiers pas de temps depuis une configuration initiale de haute énergie et les derniers pas avant la convergence d’une exécution de Minorité. Il reste encore le comportement intermédiaire de Minorité à analyser. Certaines étapes de cette approche sont généralisables et automatisées, d’autres nécessitent des efforts pour être adaptées à une nouvelle topologie. Il reste donc encore des travaux à faire pour simplifier ou automatiser en plus grande partie la rédaction des preuves. Nous avons utilisé cette méthodologie pour analyser Minorité avec les voisinages de von Neumann et de Moore (l’analyse de Moore n’est pas présentée dans cette thèse car elle est encore en cours de rédaction, une version préliminaire peut être trouvée dans [82]) :

- Définition de l’énergie d’une configuration (paramètre global) comme la somme des potentiels (paramètre local) des cellules de la configuration, telle que l’énergie soit décroissante au cours du temps, *i.e.* quand une cellule se met à jour la somme des potentiels des cellules dans son voisinage décroît.
- Montrer la chute brutale initiale de l’énergie grâce à nos travaux du chapitre 8 qui automatisent en grande partie la preuve.
- Déterminer les configurations stables d’énergie minimale : ces configurations jouent un rôle capital dans le fonctionnement de l’automate.
- Déterminer les autres configurations stables : ces configurations sont des *patchworks* des différentes configurations d’énergie minimale. Il semble que plus les configurations d’énergie minimale sont nombreuses plus les autres configurations stables sont complexes (il existe plus de façons d’agencer les différentes pièces du patchwork).
- Déterminer une configuration duale permettant de mieux visualiser les régions.
- Étudier le comportement d’une région encerclée dans une autre et déterminer comment la région encerclée va disparaître, ceci correspond aux derniers pas de temps d’une exécution.

Il reste à trouver un moyen pour analyser le comportement de l’automate au milieu d’une exécution. Pour généraliser les résultats de cette approche à la dynamique α -asynchrone quand α est proche de 0, il faudrait savoir analyser l’automate 1D **BCDEFG**(178) qui est encodé dans le comportement de Minorité. Nous avons déjà mis tous les outils en place pour qu’un résultat sur la convergence de l’automate **BCDEFG**(178), quand α est proche de 0, fournisse un résultat équivalent sur les derniers pas de temps d’une exécution de Minorité.

10.2.3 Travaux en cours sur Minorité 2D avec le voisinage de Moore.

L’étude de Minorité avec le voisinage de Moore s’est révélée plus complexe que celle de Minorité avec le voisinage de von Neumann. En appliquant la méthode précédente au voisinage de Moore, nous avons facilement défini le potentiel d’une cellule et donc l’énergie d’une configuration. Nous avons montré qu’initialement l’énergie chute brutalement et nous avons déterminé les quatre configurations stables d’énergie minimum qui sont pavées par des hachures noires/blanches ou blanches/noires et horizontales ou verticales.

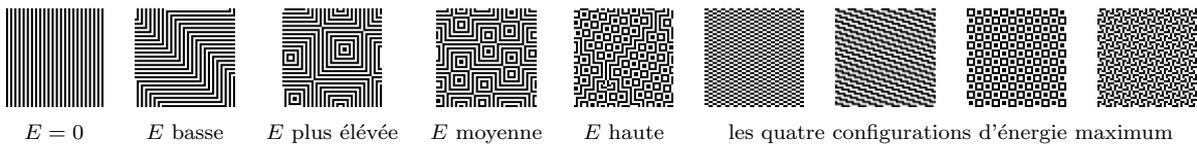


FIG. 10.1 – Des exemples de configurations stables à différents niveaux d’énergie pour Minorité 2D avec le voisinage de Moore.

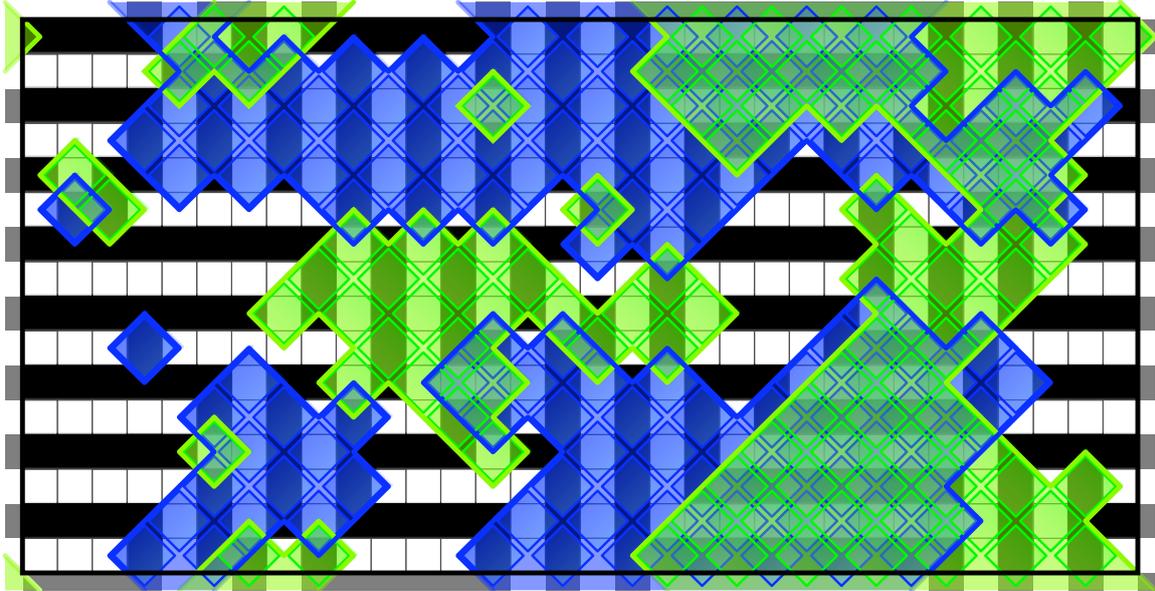


FIG. 10.2 – Une configuration 2D finie typique de taille 16×32 après $3N$ pas de temps en dynamique totalement asynchrone. Les diamants permettent de visualiser les quatre types de régions.

Par contre la présence de ces quatre configurations complexifie grandement le reste de l'étude. La structure des configurations stables est beaucoup plus complexe comme le montre la figure 10.1. Puisqu'il existe quatre façons d'hachurer une région, il n'est plus possible de définir une configuration duale avec seulement des régions noires et des régions blanches. Pour pallier ce problème, nous avons eu recours à des diamants bleus et verts que nous disposons sur la configuration, la présence d'aucun type, d'un seul type ou de deux types de diamants définit la façon dont une région est hachurée (voir la figure 10.2). Nous avons ensuite réussi à prouver qu'une configuration, dont tous les diamants sont de la même couleur et forment un rectangle, converge rapidement vers une configuration stable. Ceci correspond à l'étude des derniers pas de temps d'une exécution. Mais contrairement à Minorité avec le voisinage de von Neumann, cette configuration peut se déformer pour faire apparaître des formes complexes. Même si ces événements se produisent avec une très faible probabilité, il faut en tenir compte dans notre étude.

10.3 Minorité sur des topologies différentes

Nous avons analysé Minorité sur différentes topologies en dynamique totalement asynchrone pour essayer de déterminer les différents comportements de cette fonction de transition. Nous avons ainsi rencontré un comportement de marche aléatoire non biaisée sur les anneaux, de collectionneur de coupons sur les cliques et de marche aléatoire biaisée exponentielle sur certains arbres. De plus, ces travaux ont permis d'obtenir des résultats sur l'existence des configurations d'énergie minimale. Ces travaux sont encore préliminaires mais nous espérons pouvoir obtenir des conditions sur le nombre de configurations d'énergie minimale en fonction de la topologie du graphe. Nous savons déjà que les graphes bipartis connexes admettent seulement deux configurations d'énergie minimale. Nous avons également pu définir la notion de particules sur les arbres. Des particules sont des pièces d'informations libres de se déplacer sur le graphe et qui

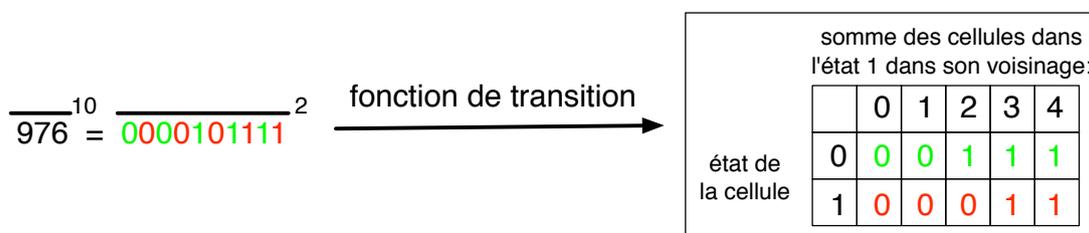
provoquent une baisse d'énergie quand elles se rencontrent. Cette notion est également liée à celle de rail, notion trop simple pour apparaître dans le cas des arbres mais visible dans le cas de Minorité sur la grille $2D$ avec le voisinage de Moore. Ces notions sont encore floues et mal comprises et il paraît essentiel d'en trouver une définition convenable pour pousser plus avant l'étude de ces automates.

Annexe A

La classe des automates cellulaires totalisant externes et ses sous-classes

Nous considérons ici des automates cellulaires en dimension 2. La fonction de transition d'un automate cellulaire *totalisant externe* ne prend en paramètre que l'état de la cellule et le nombre de cellules dans l'état 1 dans le voisinage externe de la cellule (*i.e.* sans prendre en compte l'état de la cellule). Si la fonction de transition ne dépend que du nombre de cellules actives dans le voisinages de la cellule, l'automate cellulaire est dit *totalisant*. Considérons un automate cellulaire tel qu'il existe une valeur de seuil θ telle que si une cellule possédant k voisines dans l'état 1 passe, en se mettant en jour, dans l'état 0 si $k < \theta$ et dans l'état 1 sinon. Cet automate est appelé *automate cellulaire à seuil à retour positif*. Considérons maintenant un automate cellulaire tel qu'il existe une valeur de seuil θ' telle que si une cellule qui possède k voisines dans l'état 1 se met à jour dans l'état 1 si $k < \theta'$ et dans l'état 0 sinon, cet automate est appelé *automate cellulaire à seuil à retour négatif*. La classe des automates cellulaires à seuil (à retour positif ou négatif) est une sous-classe des automates cellulaires totalisant qui est elle-même une sous-classe des automates cellulaires totalisant externes.

Notation. Nous désignons un automate totalisant par un numéro : son numéro correspond à la conversion en décimale d'un nombre binaire de taille 10 pour le voisinage de von Neumann et 18 pour le voisinage de Moore. Les bits pairs encodent un premier nombre binaire et les bits impairs encodent un deuxième nombre binaire. Le i -ième bit du premier nombre indique dans quel état passe une cellule qui est dans l'état 0 et qui a i voisines dans l'état 1. Le i -ième bit du deuxième nombre indique dans quel état passe une cellule qui est dans l'état 1 et qui a i voisines dans l'état 1. Par exemple, voici comment décoder la règle de transition de l'automate cellulaire totalisant externe numéro 976 pour le voisinage de von Neumann (OT_{976}^{vn}) :



Pour les automates cellulaires totalisant, le numéro de l'automate est la conversion en décimale d'un nombre binaire où le i -ième bit encode l'état d'une cellule se mettant à jour et possédant i voisines dans l'état 1. Nous désignons l'automate cellulaire totalisant externe numéro x pour le voisinage de von Neumann (resp. Moore) par OT_x^{vn} (resp. OT_x^m). Nous

désignons l'automate cellulaire totalisant numéro x pour le voisinage de von Neumann (resp. Moore) par Σ_x^{vn} (resp. Σ_x^m).

Bibliographie

- [1] A. Adamatzky. *Collision-Based Computing*. Springer-Verlag, ISBN 1-85233-540-8, 2002.
- [2] O. T. Avery, C. M. MacLeod, and M. McCarty. Studies on the chemical nature of the substance inducing transformation of pneumococcal types. *The Journal of Experimental Medicine*, 79(2) :137–158, 1944.
- [3] P. Balister, B. Bollobás, and R. Kozma. Large deviations for mean fields models of probabilistic cellular automata. *Random Structures & Algorithms*, 29(3) :399–415, 2006.
- [4] J. Balogh, B. Bollobás, and R. Morris. Majority bootstrap percolation on the hypercube. *Combinatorics, Probability and Computing*, to appear.
- [5] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy. *Winning Ways for your Mathematical Plays*, volume 2. Academic Press, ISBN 0-12-091152-3, 1982. chapter 25.
- [6] P. Berman and J. Simon. Investigations of fault-tolerant networks of computers. *Proceedings of the twentieth annual ACM symposium on Theory of computing (STOC88)*, pages 66–77, 1988.
- [7] H. Bersini and V. Detours. Asynchrony induces stability in cellular automata based models. In *Proceedings of Artificial Life IV*, pages 382–387, Cambridge, 1994. MIT Press.
- [8] H. J. Blok and B. Bergersen. Synchronous versus asynchronous updating in the “game of life”. *Phys. Rev. E*, 59 :3876–9, 1999.
- [9] S. R. Broadbent and J. M. Hammersley. Percolation processes i. crystals and mazes. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 53 :629–641, 1957.
- [10] P. Brémaud. *Markov chains, Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues*. Springer, 1999.
- [11] R.L. Buvel and T.E. Ingerson. Structure in asynchronous cellular automata. *Physica D*, 1 :59–68, 1984.
- [12] R. Cerf. Le modèle d’Ising et la coexistence des phases. *Images des mathématiques*, CNRS :47–51, 2004.
- [13] M. Cook. Universality in elementary cellular automata. *Complex systems*, 15(1) :1–40, 2004.
- [14] J. P. Crutchfield and J. E. Hanson. Turbulent pattern bases for cellular automata. *Physica D*, 69(3-4) :279–301, 1993.
- [15] E. Domany and W. Kinzel. Equivalence of cellular automata to Ising models and directed percolation. *Physical review letters*, 53(4) :311–314, 1984.
- [16] J. Duprat. Proof of correctness of the Mazoyer’s solution of the firing squad problem in coq. Technical Report RR2002-14, École normale supérieur de Lyon, 2002. <http://lara.inist.fr/handle/2332/792>.
- [17] R. Durrett and S. Levin. The importance of being discrete (and spatial). *Theoretical Population Biology*, 46(3) :363–394, december 1994.

- [18] M. Dyer, L. A. Goldberg, C. Greenhill, G. Istrate, and M. Jerrum. Convergence of the iterated prisoner’s dilemma game. *Combinatorics, Probability and Computing*, 11 :125–147, 2002.
- [19] B. Eisenberg. On the expectation of the maximum of iid geometric random variables. *Statistics and Probability Letters*, 78 :135–143, 2008.
- [20] K. Eloranta. Partially permutive cellular automata. *Nonlinearity*, 6(6) :1009–1023, 1993.
- [21] K. Eloranta. Random walks in cellular automata. *Nonlinearity*, 6(6) :1025–1036, 1993.
- [22] P. Chassaing et L. Gerin. Asynchronous cellular automata and Brownian motion. *Proceedings of 2007 International Conference on Analysis of Algorithms (AofA07)*, pages 385–402, 2007.
- [23] N. Fatès. Fiatlux CA simulator in Java. Sources and experimental data available from <<http://www.loria.fr/~fates/>>, 2004.
- [24] N. Fatès. *Robustesse de la dynamique des systèmes discrets : le cas de l’asynchronisme dans les automates cellulaires*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Lyon, 2004.
- [25] N. Fatès. Directed percolation phenomena in asynchronous elementary cellular automata. *Proceedings of the 7th International Conference on Cellular Automata for Research and Industry (ACRI 2006)*, LNCS 4173 :667–675, 2006.
- [26] N. Fatès and M. Morvan. An experimental study of robustness to asynchronism for elementary cellular automata. *Complex Systems*, 16(1) :1–27, 2005.
- [27] N. Fatès, M. Morvan, N. Schabanel, and É. Thierry. Fully asynchronous behaviour of double-quiescent elementary cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 362 :1–16, 2006. An extended abstract was also published in Proc. of MFCS’2005.
- [28] N. Fatès, D. Regnault, N. Schabanel, and É. Thierry. Asynchronous behaviour of double-quiescent elementary cellular automata. In *Proceedings of LATIN’2006*, volume 3887 of LNCS, pages 455–466. Springer, 2006.
- [29] L. Fribourg, S. Messika, and C. Picaronny. Coupling and self-stabilization. In *Proceedings of DISC’04*, volume 3274 of LNCS, pages 201–215. Springer, 2004.
- [30] H. Fukś. Non-deterministic density classification with diffusive probabilistic cellular automata. *Physical Review E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, 66(2) :066106.1–066106.4, 2002.
- [31] H. Fukś. Probabilistic cellular automata with conserved quantities. *Nonlinearity*, 17(1) :159–173, 2004.
- [32] H. Fukś and A. T. Lawniczak. Individual-based lattice model for spatial spread of epidemics. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 6(3) :191–200, 2001.
- [33] P. Gács. Self-correcting two-dimensional arrays. *Advances in Computing Research*, 5 :223–326, 1989.
- [34] P. Gács. Reliable cellular automata with self-organization. *Journal of Statistical Physics*, 103(1/2) :45–267, 2001.
- [35] P. Gács and J. Reif. A simple three-dimensional real-time reliable cellular array. *Journal of Computer and System Sciences*, 36(2) :125–147, 1988.
- [36] M. Gardner. Mathematical games : The fantastic combinations of John Conway’s new solitaire game ”life”. *Scientist American*, 223 :120–123, 1970.
- [37] M. Gardner. *Wheels, Life, and other Mathematical Amusements*. W.H. Freeman, 1983. chapter 20-22 with participation of B. Gosper.

- [38] E. Góles and S. Martínez. *Neural and automata networks, dynamical behavior and applications*, volume 58 of *Maths and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [39] L. Gray. A reader's guide to Gács's 'positive rates' paper. *Journal of Statistical Physics*, 103(1-2) :1–44, 2001.
- [40] G. Grimmett. *Percolation*, volume 321 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 2nd edition, 1999.
- [41] G. Grimmett. *The Random-Cluster Model*, volume 333 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 2006.
- [42] G. Grimmett and D. Stirzaker. *Probability and Random Process*. Oxford University Press, 3rd edition, 2001.
- [43] A. Holroyd. Sharp metastability threshold for two-dimensional bootstrap percolation. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 79(8) :2554–2558, 1982.
- [44] J. J. Hopfield. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 79(8) :2554–2558, 1982.
- [45] <http://www.cmm.uchile.cl/~schabanel/2DMINORITY>.
- [46] E. Ising. Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, 31 :253–258, 1925.
- [47] Y. Kanada. Asynchronous 1d cellular automata and the effects of fluctuation and randomness. In *Proceedings of the Fourth Conference on Artificial Life (A-Life IV)*. MIT Press, 1994.
- [48] K. Kaneko and Y. Akutsu. Phase transitions in two-dimensional stochastic cellular automata. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 19 :L69–74, 1986.
- [49] J. Kari. The nilpotency problem of one-dimensional cellular automata. *SIAM Journal on Computing*, 21(3) :571–586, 1992.
- [50] J. Kari. Reversibility and surjectivity problems of cellular automata. *Journal of Computer and System Sciences*, 48(1) :149–182, 1994.
- [51] J. Kari. Theory of cellular automata : A survey. *Theoretical computer science*, 334(1-3) :3–33, 2005.
- [52] W. O. Kermack and A. G. McKendrick. Contributions to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society*, 115A :700–721, 1927.
- [53] B. Kerr, M. A. Riley, M. W. Feldman, and B. J. M. Bohannan. Local dispersal promotes biodiversity in a real-life game of rock-paper-scissors. *Nature*, 418 :171–174, 2002.
- [54] J. E. Kittock. Emergent conventions and the structure of multi-agent systems. In *Proceedings of the 1993 Santa Fe Institute Complex Systems Summer School*, 1993.
- [55] T.M. Liggett. *Interacting Particle Systems*. Springer Verlag, 1985.
- [56] T.M. Liggett. *Stochastic Interacting Systems : contac, voter, and exclusion processes*. Springer Verlag, 1999.
- [57] E. D. Lumer and G. Nicolis. Synchronous versus asynchronous dynamics in spatially distributed systems. *Physica D*, 71 :440–452, 1994.
- [58] J. Mazoyer. A six states minimal time solution to the firing squad synchronization problem. *Theoretical Computer Science*, 50(2) :183–238, 1987.
- [59] J. Mazoyer. An overview of the firing squad synchronization problem. In *Proceedings of the LITP Spring School on Theoretical Computer Science*, pages 82–94. Springer-Verlag, 1988.

- [60] W. S. McCulloch and W. Pitts. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5 :115–133, 1943.
- [61] S. Messika. *Méthodes Probabilistes pour la vérification des systèmes distribués*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Cachan, France, 2004.
- [62] T. M. Mitchell. *Machine Learning*. McGraw-Hill Science, 1997.
- [63] D. Mollison. Dependence of epidemic and population velocities on basic parameters. *Mathematical Biosciences*, 107 :255–287, 1991.
- [64] E. Mossel and S. Roch. Slow emergence of cooperation for win-stay lose-shift on trees. *Machine Learning*, 67(1-2) :7–22, 2006.
- [65] K. Nagel and M. Schreckenberg. A cellular automaton model for freeway traffic. *Journal de Physique I*, 2(12) :2221–2229, 1992.
- [66] John Von Neumann and A. W. Burks. *Theory of Self-Reproducing Automata*. University of Illinois Press, 1966.
- [67] N. Ollinger. *Automates cellulaires : structures*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Lyon, 2002.
- [68] N. Ollinger. The intrinsic universality problem of one-dimensional cellular automata. In *LNCS Proc. of 20th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2003)*, volume 2607/2003, pages 632–641, 2003.
- [69] N. Ollinger. Universalities in cellular automata : a (short) survey. In *Proc. of Journées Automates Cellulaires 2008 (JAC2008)*, pages 102–118, 2008.
- [70] L. Onsager. Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review*, 65 :117–149, 1944.
- [71] R. Peierls. On the Ising model of ferromagnetism. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1936.
- [72] D. Peleg. Local majorities, coalitions and monopolies in graphs : a review. *Theoretical Computer Science*, 282 :231–257, 2002.
- [73] M. Pivato. Spectral domain boundaries in cellular automata. *Fundamenta Informaticae*, 78(3) :417–447, 2007.
- [74] D. Randall. *Counting in lattices : some combinatorial problems from statistical mechanics*. PhD thesis, University of Berkeley, 1994.
- [75] I. Rapaport. *Inducing an order on cellular automata by a grouping operation*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Lyon, 1997.
- [76] I. Rapaport, K. Suchan, I. Todinca, and J. Verstraete. On dissemination thresholds in regular and irregular graph classes. In *Proceedings of the 8th Latin American Theoretical Informatics (LATIN2008)*, pages 24–35. Springer, 2008.
- [77] D. Regnault. Abrupt behaviour changes in cellular automata under asynchronous dynamics. In *Proceedings of 2nd European Conference on Complex Systems (ECCS)*, Oxford, UK, 2006.
- [78] D. Regnault. Directed percolation arising in stochastic cellular automata analysis. In *Proceedings of the 33rd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, volume 5162 of LNCS, pages 563–574, 2008.
- [79] D. Regnault. Quick energy drop in stochastic 2d minority. In *Proceedings of 8th International Conference on Cellular Automata for Research and Industry (ACRI2008)*, volume LNCS 5191, 2008. to appear.

- [80] D. Regnault, J.-B. Rouquier, and E. Thierry. Stochastic minority on graphs. Technical Report hal-00272271, École normale supérieure de Lyon, 2008. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00272271/en/>.
- [81] D. Regnault, N. Schabanel, and E. Thierry. Progresses in the analysis of stochastic 2d cellular automata : A study of asynchronous 2d minority. In *Proceedings of the 32nd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS2007)*, volume LNCS 4708, pages 320–332. Springer, 2007.
- [82] D. Regnault, N. Schabanel, and E. Thierry. On the analysis of "simple" 2d stochastic cellular automata. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Language and Automata Theory and Applications*, LNCS, pages 463–474. Springer, 2008. to appear.
- [83] B. Schönfisch and A. de Roos. Synchronous and asynchronous updating in cellular automata. *BioSystems*, 51(3) :123–143, 1999.
- [84] B. Schönfisch. *Zelluläre automaten und modelle für epidemien*. PhD thesis, Universität Tübingen, 1993.
- [85] R. E. Tarjan. Amortized computational complexity. *SIAM Journal of Algebraic and Discrete Methods*, 6(2) :306–318, 1985.
- [86] G. Theyssier. *Automates Cellulaires : un modèle de complexités*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Lyon, Décembre 2005.
- [87] A. Toom. Stable and attractive trajectories in multicomponent systems. *Advances in Probability*, 6 :549–575, 1980.
- [88] S. Wolfram. *A new kind of science*. Wolfram Media, 2002.

Publications

- [1] N. Fatès, D. Regnault, N. Schabanel, and É. Thierry. Asynchronous behaviour of double-quiescent elementary cellular automata. In *Proceedings of LATIN'2006*, volume 3887 of *LNCS*, pages 455–466. Springer, 2006.
- [2] D. Regnault. Abrupt behaviour changes in cellular automata under asynchronous dynamics. In *Proceedings of 2nd European Conference on Complex Systems (ECCS)*, Oxford, UK, 2006.
- [3] D. Regnault. Directed percolation arising in stochastic cellular automata analysis. In *Proceedings of the 33rd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, volume 5162 of *LNCS*, pages 563–574, 2008.
- [4] D. Regnault. Quick energy drop in stochastic 2d minority. In *Proceedings of 8th International Conference on Cellular Automata for Research and Industry (ACRI2008)*, volume LNCS 5191, 2008. to appear.
- [5] D. Regnault, J.-B. Rouquier, and E. Thierry. Stochastic minority on graphs. Technical Report hal-00272271, École Normale Supérieure de Lyon, 2008. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00272271/en/>.
- [6] D. Regnault, N. Schabanel, and E. Thierry. Progresses in the analysis of stochastic 2d cellular automata : A study of asynchronous 2d minority. In *Proceedings of the 32nd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS2007)*, volume LNCS 4708, pages 320–332. Springer, 2007.
- [7] D. Regnault, N. Schabanel, and E. Thierry. On the analysis of "simple" 2d stochastic cellular automata. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Language and Automata Theory and Applications*, LNCS, pages 463–474. Springer, 2008. to appear.

Index

- σ -algèbre, 25
- Énergie, 100, 117, 130, 147
- Épidémie, 13
- État (AC), 29
- État (CM), 11
 - Récurrent, 27
 - Transitoire, 27
- Événement, 25
- Île, 110
- ACE, 16, 38
 - BCDEFG**(178), 65, 81–89, 115, 132, 146, 147
 - BCDEF**(242), 58
 - BCDE**(250), 52
 - BCEFG**(146), 16, 66
 - BCEF**(210), 67
 - BCE**(218), 54
 - BCFG**(150), 67
 - BCF**(214), 66, 69–79, 145
 - BC**(222), 51
 - BDEF**(226), 64
 - BDEG**(170), 64
 - BDE**(234), 52
 - BEFG**(130), 55
 - BEF**(194), 59, 145
 - BEG**(138), 64
 - BE**(202), 54
 - BF**(198), 62
 - BG**(142), 62
 - B**(206), 51
 - DE**(232), 49
 - EFG**(128), 50
 - EF**(192), 50
 - E**(200), 49
- ACEDQ, 38
- Amas, 83
- Apériodique, 28
- Arbre biaisé, 140
 - Porte, 140
 - Queue, 140
 - Tête, 140
- Arbre de masques, 45
- Arbre réduit, 136
- Attracteur, 27
- Automate cellulaire, 29
- Automate cellulaire à seuil, 151
 - Retour négatif, 151
 - Retour positif, 151
- Bande, 99
- Base de masques, 45
- Bootstrap model, 20
- Bruit, 95
- Candidat, 84
- Cellule, 11, 29, 130
- Cellule active, 30
- Cellule contrainte, 85
- Cellule inactive, 30
- Chaîne de Markov, 27
- Chaotique, 14
- Chemin alternant, 100
- Classification
 - ACEDQ, 22
 - Wolfram, 14
- Clique, 133
- Collectionneur de coupon, 28
- Collision, 71
- Coloriage, 120
 - k -décroissant, 121
- Configuration, 29, 130
 - 1D Torique, 30, 38
 - Initiale, 29
 - Stable, 30
- Configuration bornée, 110
- Configuration correcte, 140
- Configuration duale, 105, 134, 147
- Configuration réduite, 137
- Connexe, 99
- Convergence (AC), 30
- Convergence (CM), 28
- Convergence presque sûre, 26
- Convexe, 110

Correcte, 141
 Couplage, 18, 33, 34
 Couple aléatoire, 33
 Critère de correspondance, 84

 Damier, 101
 Diagramme espace-temps, 11
 Dilemme du prisonnier, 20
 Dimension, 11, 30
 Distribution, 27
 Initiale, 27
 Distribution de probabilité, 26
 Distribution stationnaire, 27
 Divergence, 30
 Doublement quiescent, 38
 Dynamique, 29
 α -asynchrone, 11, 16, 31, 43
 Parallèle, voir Dynamique Synchronne
 Séquentielle, voir Dynamique Totalement Asynchrone
 Série, voir Dynamique Totalement Asynchrone
 Synchronne, 11, 16, 31
 Totalement asynchrone, 11, 31

 Ensemble des états (Probabilité), 27
 Ensemble limite, 27
 Enveloppe convexe, 110
 Espérance, 26
 Espérance conditionnelle, 26
 Espace de probabilité, 25

 Ferromagnétisme, 13, voir Modèle d'Ising
 Fonction d'énergie, voir Fonction potentielle
 Fonction de Lyapunov, 32
 Fonction de poids locaux, 47
 Fonction de transition, 11, 29
 ACE, 38
 Fonction potentielle, 18, 32, 47
 Frontière, 39, 100, 131

 Graphe de transition, 27
 Grille, 30

 Hauteur, 84
 Hors-équilibre, 100

 Indécidabilité, 16
 Indépendance, 25
 Intérieur, 120
 Intrinsèquement universel, 14

 Jeu de la vie, 13, 93
 Jeux sur les graphes, 20–21

 Lien, 83
 Fermé, 83
 Ouvert, 83
 Linéarité de l'espérance, 26
 Loi jointe, 34
 Loi marginale, 34

 Marche aléatoire biaisée, 140
 Marche aléatoire, 28
 Biaisée, 28
 Masque, 45
 Matrice de transition, 27
 Mesure de probabilité, 25
 Minorité, 19, 99
 Mise à jour, 29
 Modèle d'Ising, 13, 17, 19
 Modèle de Potts, 13
 Motif, 120
 Motif de fond, 14
 Motif en damier, 99

 Nilpotent, 14, 16
 Notation
 ACE Fatès, 38
 ACE Wolfram, 38

 Occurrence, 45

 Partenaire, 86
 Particule, voir Signal, 135
 Percolation, 13, 17–18, 20
 Percolation dirigée, 83
 Poids d'une configuration, 47
 Poids local, 47
 Pont, 140
 Position, 141
 Potentiel, 100, 130, 147
 Potentiel relatif, 121
 Probabilité, 25
 Probabilité conditionnelle, 25
 Probabilité de convergence, 81
 Processus stochastique discret, 27
 Puissance Turing, 13, 14, 16

 Quiescent, 38

 Réaliser, 25
 Région

0-région, 39
1-région, 39
Régions homogènes, 100
Réseau de neurones, 13, 17–19
Résistance aux pannes, 16, 146
Résultat, 25
Recouvrement, 122

Séquence décroissante, 118
Semi-bornée, 107
Signal, 14
Site, 83
Suite i.i.d., 27
Systèmes distribués, 21

Taux d'asynchronisme, 31
Temps, 11
Temps de convergence, 30
Temps de relaxation, 21, 30
Tore, 30
Totalisant, 151
Totalisant externe, 151
Trajectoire, 29
Transition, 29
Transition Active, 29
Transition de phase, 16

Univers, 25

Variable aléatoire, 26
Vecteur aléatoire, 33
Voisinage, 11, 29, 130
 de Moore, 11, 31
 de von Neumann, 11, 31
 Voisinage premier, 11, 31

Résumé : Dans cette thèse, nous étudions le comportement des automates cellulaires en dynamiques asynchrones, où à chaque pas de temps seulement un sous-ensemble aléatoire de cellules se met à jour. Le comportement des automates cellulaires évoluant sous ces régimes est radicalement différent de leur comportement classique. En dynamique synchrone, on constate plutôt des signaux qui naissent, se déplacent, s'intersectent et meurent. En dynamique asynchrone, des motifs propres à la règle apparaissent rapidement et les zones colorées par ces différents motifs entrent en compétition pour recouvrir la configuration. Selon la règle de l'automate, soit un motif l'emporte et la dynamique atteint une configuration stable ; soit ces zones évoluent en permanence. Nous avons utilisé une approche exploratoire pour rencontrer un grand nombre de comportements différents : marches aléatoires, mouvements de particules, percolation, interactions entre zones 2D, etc. Nous avons également cherché à développer des outils généraux permettant ainsi d'analyser un grand nombre de cas.

Mots-clés : Automates cellulaires, dynamiques stochastiques, temps de relaxation, processus stochastiques, marches aléatoires, percolation.

Abstract : In this thesis, we study the behavior of cellular automata under asynchronous dynamics, where at each time step a random subset of cells is updated. The behavior of cellular automata under these dynamics is radically different from their classical behavior. Under synchronous dynamics, signals appear, move, collide and disappear. Under asynchronous dynamics, patterns appear quickly and the regions corresponding to the different patterns compete with each other to recover the whole configuration. Depending on the rule of the automaton, either a pattern manage to cover the whole configuration and the dynamics reaches a stable configuration ; or the different regions evolve constantly. We considered many cellular automata in order to encounter different behaviors : random walks, movements of particles, percolation, interactions between 2D regions, etc. We developed general tools which can be used to analyze many cases.

Keywords : Cellular automata, stochastic dynamics, relaxation time, stochastic processes, random walks, percolation.