

Université – IUT – Département GEII

Outils Mathématiques et Logiciels

Fractions rationnelles et transformée de Laplace

BUT GEII

H. Hadj-Abdelkader et S. Ahmed-Ali

Formation BUT Génie Électrique et Informatique Industrielle

Du modèle temporel au calcul algébrique

Décomposition en éléments simples, échelon, impulsion, transformées usuelles, transformée inverse, équations différentielles, circuits RC/RL/RLC et fonctions de transfert.

Année universitaire 2026–2027

Table des matières

1	Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles	4
1.1	Fraction rationnelle, zéros et pôles	4
1.2	Première étape : comparer les degrés	4
1.3	Factoriser le dénominateur dans $\mathbb{R}$	5
1.4	Forme générale de la DES dans $\mathbb{R}$	5
1.5	Méthodes de calcul des coefficients	6
1.6	Cas 1 – pôles réels simples	6
1.7	Cas 2 – pôle multiple	7
1.8	Cas 3 – facteur quadratique irréductible	7
1.9	Cas 4 – plusieurs types de facteurs	8
1.10	Vérifier une décomposition	8
1.11	Passage vers la transformée inverse de Laplace	8
2	Pourquoi la transformée de Laplace en GEII ?	9
3	Préliminaires : causalité, échelon et impulsion	9
3.1	Signaux causaux	9
3.2	Échelon unité de Heaviside	10
3.3	Impulsion de Dirac	10
4	Définition de la transformée de Laplace	10
5	Table des transformées usuelles	11
6	Propriétés fondamentales	12
6.1	Linéarité	12
6.2	Transformée d’une dérivée	12
6.3	Intégration temporelle	13
6.4	Multiplication par une exponentielle : translation en p	13
6.5	Retard temporel	13
6.6	Changement d’échelle	13
6.7	Multiplication par le temps	14
6.8	Signaux périodiques	14
6.9	Produit de convolution	14
7	Transformée de Laplace inverse	14
7.1	Pôles réels simples	15
7.2	Pôle réel multiple	15
7.3	Pôles complexes conjugués	15

8 Théorèmes des valeurs initiale et finale	15
9 Résolution des équations différentielles par Laplace	16
10 Application 1 – Circuit RC : charge d'un condensateur	17
10.1 Modèle temporel	17
10.2 Réponse à un échelon	17
10.3 Fonction de transfert du RC	18
11 Application 2 – Circuit RL : établissement du courant	18
12 Application 3 – Circuit RLC série : système du second ordre	18
13 Application 4 – Modèle mécanique masse–ressort–amortisseur	19
14 Fonction de transfert et lecture physique	19
14.1 Premier ordre canonique	20
14.2 Second ordre canonique	20
15 Signaux retardés et commandes par morceaux	20
16 Lire les signaux avant de calculer	21
16.1 Les quatre signaux élémentaires à reconnaître	21
17 D'où viennent les formules essentielles ?	22
17.1 Dérivée : démonstration par intégration par parties	22
17.2 Retard : pourquoi apparaît e^{-ap} ?	22
18 Transformée inverse et DES : mise en pratique	22
19 Exemple fil rouge – du circuit électrique à la réponse temporelle	23
19.1 Étape 1 – schéma et choix des grandeurs	23
19.2 Étape 2 – modèle temporel	23
19.3 Étape 3 – passage dans le domaine de Laplace	23
19.4 Étape 4 – réponse à un échelon	24
19.5 Étape 5 – lecture graphique et physique	24
19.6 Étape 6 – même circuit avec condensateur préchargé	24
20 Second ordre : comprendre les pôles plutôt que mémoriser	25
21 Application détaillée – RLC série et réponse transitoire	25
22 Convolution et réponse impulsionnelle : sens physique	26
23 Exemples supplémentaires en physique et en GEII	26

23.1 Capteur thermique du premier ordre	27
23.2 Vitesse d'un moteur à courant continu – modèle simplifié	27
23.3 Masse–ressort–amortisseur	27
24 Mini-bilan de compétences avant les TD	27
25 Erreurs fréquentes et bonnes pratiques	27
26 Synthèse méthodologique	28
27 Formulaire récapitulatif	29

1. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles

Objectifs pédagogiques

Avant d'aborder la transformée inverse de Laplace, l'étudiant doit savoir décomposer une fraction rationnelle en éléments simples dans $\mathbb{R}$. À l'issue de ce chapitre, il doit savoir :

- reconnaître une fraction propre ou impropre et effectuer, si nécessaire, une division euclidienne ;
- factoriser le dénominateur dans $\mathbb{R}$ et identifier les pôles et leurs multiplicités ;
- écrire la forme générale de la décomposition en présence de pôles simples, multiples ou de facteurs quadratiques irréductibles ;
- déterminer efficacement les coefficients par évaluation aux pôles, valeurs particulières ou identification ;
- vérifier une décomposition par recombinaison ;
- exploiter ensuite la DES pour calculer une primitive ou une transformée inverse de Laplace.

Pourquoi apprend-on cela en GEII ?

Après transformation de Laplace, les tensions, courants, vitesses ou positions sont très souvent décrits par une fraction rationnelle

$$X(p) = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

La DES transforme cette expression en une somme de termes élémentaires dont on connaît immédiatement l'original temporel. Elle constitue donc le lien entre **calcul algébrique dans le domaine de Laplace** et **réponse temporelle du système**.

1.1 Fraction rationnelle, zéros et pôles

Une fraction rationnelle réelle s'écrit

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad P, Q \in \mathbb{R}[x], \quad Q \neq 0.$$

Les racines de P sont les **zéros** de la fraction. Les racines de Q qui ne sont pas simplifiées avec le numérateur sont ses **pôles**. La multiplicité d'un pôle est la puissance du facteur correspondant dans le dénominateur.

Lire la structure avant de calculer

Pour

$$F(x) = \frac{x+1}{(x-2)^2(x+3)},$$

les pôles sont 2, de multiplicité 2, et -3 , de multiplicité 1. Avant tout calcul, on sait donc que la DES contiendra

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+3}.$$

Cette lecture préalable évite une grande partie des erreurs de forme.

1.2 Première étape : comparer les degrés

Si $\deg P < \deg Q$, la fraction est dite **propre**. Sinon, il faut commencer par la division euclidienne :

$$P(x) = E(x)Q(x) + R(x), \quad \deg R < \deg Q,$$

d'où

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}}.$$

$E(x)$ est la **partie entière** ; seule la partie propre R/Q est ensuite décomposée.

Attention

Ne jamais commencer une DES avant d'avoir comparé les degrés. Si $\deg P \geq \deg Q$, une division euclidienne est nécessaire.

Exemple – partie entière

Considérons

$$F(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2x - 3}.$$

La fraction est impropre car $3 > 2$. La division donne

$$x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = (x + 1)(x^2 + 2x - 3) + (2 - x),$$

donc

$$F(x) = x + 1 + \frac{2 - x}{x^2 + 2x - 3}.$$

Comme $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$, la DES porte ensuite uniquement sur la dernière fraction.

1.3 Factoriser le dénominateur dans $\mathbb{R}$

Dans $\mathbb{R}[x]$, les facteurs irréductibles sont :

- les facteurs linéaires $x - a$;
- les facteurs quadratiques $x^2 + bx + c$ dont le discriminant $\Delta = b^2 - 4c$ est strictement négatif.

Ainsi, après factorisation,

$$Q(x) = \prod_i (x - a_i)^{m_i} \prod_j (x^2 + b_j x + c_j)^{n_j}, \quad \Delta_j < 0.$$

1.4 Forme générale de la DES dans $\mathbb{R}$

Pour chaque facteur linéaire $(x - a)^m$, on écrit **tous** les termes

$$\boxed{\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x - a)^m}}.$$

Pour chaque facteur quadratique irréductible $(x^2 + bx + c)^n$, on écrit

$$\boxed{\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + bx + c} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + bx + c)^n}}.$$

Le numérateur associé à un facteur quadratique est donc de degré au plus 1.

À retenir

La forme de la DES est imposée par la factorisation du dénominateur. Il faut donc **factoriser d'abord, écrire la forme ensuite, calculer les coefficients seulement à la fin.**

1.5 Méthodes de calcul des coefficients

Méthode générale par identification

La méthode systématique consiste à :

1. écrire la forme générale de la DES ;
2. multiplier par le dénominateur commun ;
3. développer et regrouper selon les puissances de x ;
4. identifier les coefficients des polynômes ;
5. résoudre le système linéaire obtenu.

Évaluation aux pôles

Pour un pôle simple a , le coefficient associé à $1/(x - a)$ s'obtient immédiatement :

$$A = [(x - a)F(x)]_{x=a}.$$

Pour un pôle multiple, la multiplication par la puissance maximale permet d'obtenir directement le coefficient du terme de plus haut ordre.

Valeurs particulières et limite à l'infini

Après multiplication par le dénominateur, des valeurs simples comme $x = 0, 1, -1$ peuvent compléter rapidement le calcul. La limite en $\pm\infty$ peut également fournir une relation utile entre les coefficients.

Méthode efficace en sept étapes

1. Comparer les degrés de P et Q .
2. Effectuer la division euclidienne si nécessaire.
3. Factoriser complètement Q dans $\mathbb{R}$.
4. Identifier les pôles et leurs multiplicités.
5. Écrire la forme générale de la DES sans calculer.
6. Calculer d'abord les coefficients accessibles par évaluation aux pôles, puis compléter par valeurs particulières ou identification.
7. Recomposer la fraction pour vérifier.

1.6 Cas 1 – pôles réels simples

Exemple guidé – deux pôles simples

Décomposer

$$F(x) = \frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 2)}.$$

On pose

$$F(x) = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}.$$

Après multiplication par $(x - 1)(x + 2)$:

$$2x + 1 = A(x + 2) + B(x - 1).$$

Pour $x = 1$, $3 = 3A$, donc $A = 1$. Pour $x = -2$, $-3 = -3B$, donc $B = 1$. Finalement

$$F(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}.$$

1.7 Cas 2 – pôle multiple

Exemple guidé – pôle triple

Décomposer

$$F(x) = \frac{x^2 + 1}{(x-2)^3}.$$

La forme imposée est

$$F(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3}.$$

Après multiplication par $(x-2)^3$:

$$x^2 + 1 = A(x-2)^2 + B(x-2) + C.$$

En $x = 2$, $C = 5$. L'identification donne ensuite $A = 1$ et $B = 4$, d'où

$$F(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{5}{(x-2)^3}.$$

1.8 Cas 3 – facteur quadratique irréductible

Exemple guidé – facteur $x^2 + 1$

Décomposer

$$F(x) = \frac{3x}{(x^2 + 1)(x-1)}.$$

Comme $x^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x-1}.$$

Après multiplication par le dénominateur :

$$3x = (Ax + B)(x-1) + C(x^2 + 1).$$

L'identification conduit à

$$A = -\frac{3}{2}, \quad B = \frac{3}{2}, \quad C = \frac{3}{2},$$

donc

$$F(x) = \frac{-\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}}{x^2 + 1} + \frac{\frac{3}{2}}{x-1}.$$

1.9 Cas 4 – plusieurs types de facteurs

Pour

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^2(x-b)(x^2+cx+d)}, \quad c^2 - 4d < 0,$$

la forme générale est

$$F(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{Dx+E}{x^2+cx+d}.$$

Cette écriture doit être faite **avant** toute recherche des coefficients.

1.10 Vérifier une décomposition

Trois contrôles simples sont recommandés :

- recomposer les éléments simples et retrouver le numérateur initial ;
- comparer quelques valeurs numériques admissibles de x ;
- contrôler le comportement à l'infini et, lorsque c'est pertinent, les résidus aux pôles simples.

Erreurs fréquentes

- oublier la partie entière lorsque la fraction est impropre ;
- oublier un terme pour un pôle multiple ;
- écrire une constante au numérateur d'un facteur quadratique irréductible au lieu de $Ax+B$;
- chercher les coefficients avant d'avoir factorisé complètement le dénominateur ;
- ne pas vérifier la décomposition finale.

1.11 Passage vers la transformée inverse de Laplace

La variable sera ensuite notée p plutôt que x . Par exemple,

$$F(p) = \frac{5}{p(p+5)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+5}$$

conduit directement à

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = 1 - e^{-5t}.$$

De même, un facteur quadratique complété sous la forme $(p+a)^2 + \omega^2$ conduit à des exponentielles amorties multipliées par des sinus ou cosinus.

Lecture physique

Les termes de la DES ne sont pas de simples artifices algébriques : dans une réponse temporelle, un terme $1/(p+a)$ correspond à un mode exponentiel e^{-at} ; une paire complexe correspond à une oscillation amortie. La DES prépare donc déjà l'interprétation dynamique des pôles.

À retenir

Analyser → Factoriser → Écrire la forme → Calculer → Vérifier

2. Pourquoi la transformée de Laplace en GEII ?

Objectifs pédagogiques

À l'issue de ce chapitre, l'étudiant doit savoir :

- interpréter un signal causal et manipuler l'échelon de Heaviside ;
- calculer la transformée de Laplace de signaux usuels ;
- exploiter les propriétés de dérivation, retard, changement d'échelle et multiplication par t ;
- retrouver un signal temporel par transformée inverse, notamment par décomposition en éléments simples ;
- résoudre une équation différentielle avec conditions initiales ;
- établir et exploiter une fonction de transfert simple en électronique et en physique.

De nombreux systèmes du GEII sont décrits par des équations différentielles : tension aux bornes d'un condensateur, courant dans une bobine, vitesse d'un moteur, température d'une enceinte, position d'un système mécanique, etc. Dans le domaine temporel, la dérivation complique souvent les calculs. La transformée de Laplace remplace ces dérivées par des opérations algébriques en une variable complexe p .

Rappel / point clé

L'idée centrale est :

$$\text{équation différentielle en } t \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad \text{équation algébrique en } p$$

Puis, une fois $X(p)$ déterminée, on revient au temps par $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(p)\}$.

Application GEII

Pour un circuit RC soumis à un échelon de tension, l'équation $RC u'_C(t) + u_C(t) = E$ devient, sous conditions initiales nulles,

$$(1 + RCp)U_C(p) = \frac{E}{p}.$$

Le problème différentiel est devenu une simple équation algébrique.

3. Préliminaires : causalité, échelon et impulsion

Pourquoi apprend-on cela ?

Avant de transformer une équation, il faut savoir **décrire correctement les signaux appliqués au système**. En électronique, une alimentation que l'on connecte à $t = 0$, une impulsion de commande ou une consigne retardée se modélisent naturellement avec $u(t)$, $\delta(t)$ et leurs versions retardées.

3.1 Signaux causaux

Un signal est dit **causal** s'il est nul avant l'instant choisi comme origine :

$$f(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0.$$

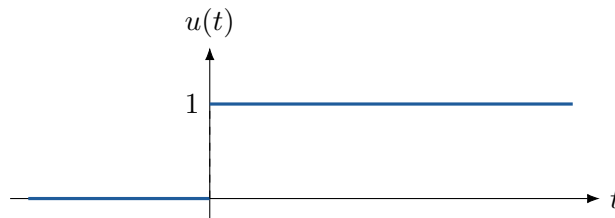
Cette convention correspond naturellement aux expériences où une excitation est appliquée à $t = 0$ et où l'on étudie la réponse pour $t \geq 0$.

3.2 Échelon unité de Heaviside

On définit l'échelon unité $u(t)$ par

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Un échelon d'amplitude E vaut $Eu(t)$.



Le signal retardé $u(t - a)$ bascule de 0 à 1 à l'instant $t = a$. Une porte rectangulaire d'amplitude A , active entre a et b , s'écrit

$$A[u(t - a) - u(t - b)].$$

Exemple guidé – commande temporisée

Une alimentation de 12 V est appliquée à $t = 2$ s puis coupée à $t = 5$ s. Le signal d'entrée est

$$e(t) = 12[u(t - 2) - u(t - 5)].$$

Cette écriture est particulièrement pratique pour traiter ensuite le circuit par Laplace.

3.3 Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac $\delta(t)$ modélise une action très brève dont l'aire vaut 1. Formellement,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1, \quad \delta(t) = 0 \text{ pour } t \neq 0.$$

Elle sert par exemple à modéliser un choc mécanique, une injection instantanée de charge ou l'entrée impulsionnelle d'un système.

Attention

$\delta(t)$ n'est pas une fonction ordinaire. En BUT GEII, on l'utilise surtout comme modèle idéal et via la relation essentielle $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$.

4. Définition de la transformée de Laplace

Pourquoi apprend-on cela ?

La transformée de Laplace remplace une fonction du temps par une fonction de la variable complexe p . Son intérêt en GEII est surtout opérationnel : **les dérivées deviennent des expressions algébriques en p** , ce qui simplifie fortement l'étude des circuits et des systèmes dynamiques.

Pour une fonction causale f , sa transformée de Laplace est

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

où p est en général complexe : $p = \sigma + j\omega$.

L'intégrale ne converge pas nécessairement pour tout p . Pour les applications usuelles du BUT, les signaux considérés sont continus par morceaux et de croissance au plus exponentielle, ce qui garantit l'existence de la transformée dans un demi-plan $\Re(p) > \alpha$.

Calcul direct – échelon unité

Pour $\Re(p) > 0$,

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}.$$

Ainsi $\mathcal{L}\{1\} = 1/p$ pour un signal causal.

Calcul direct – exponentielle décroissante

Pour $f(t) = e^{-at}u(t)$,

$$\mathcal{L}\{f\} = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} dt = \frac{1}{p+a},$$

sous la condition $\Re(p+a) > 0$.

5. Table des transformées usuelles

Signal $f(t)$	Transformée $F(p)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$t u(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega t)u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$

À retenir

Il est inutile de mémoriser une très grande table. Les cinq briques essentielles sont : 1, t^n , e^{-at} , $\sin(\omega t)$ et $\cos(\omega t)$, puis on applique les propriétés de translation, retard et linéarité.

6. Propriétés fondamentales

Pourquoi apprend-on cela ?

Les propriétés suivantes constituent la véritable boîte à outils de Laplace. Elles permettent de transformer directement des équations différentielles, des retards, des intégrations et des signaux composés sans recalculer l'intégrale de définition à chaque fois.

6.1 Linéarité

Mini-exemple – combinaison de signaux

Si $f(t) = 3 - 2e^{-4t}$, alors par linéarité

$$F(p) = \frac{3}{p} - \frac{2}{p+4}.$$

On transforme chaque terme séparément puis on conserve les coefficients.

Si f et g admettent une transformée,

$$\mathcal{L}\{\lambda f + \mu g\} = \lambda F + \mu G.$$

Exemple guidé

Pour $f(t) = 3 - 2e^{-4t} + 5\sin(2t)$,

$$F(p) = \frac{3}{p} - \frac{2}{p+4} + \frac{10}{p^2+4}.$$

6.2 Transformée d'une dérivée

Mini-exemple – une condition initiale apparaît

Pour $y'(t) + 2y(t) = 0$ avec $y(0) = 5$:

$$pY(p) - 5 + 2Y(p) = 0 \implies Y(p) = \frac{5}{p+2},$$

d'où $y(t) = 5e^{-2t}$. La condition initiale est intégrée directement dans le calcul.

Pour une fonction suffisamment régulière,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0^+).$$

Pour la dérivée seconde,

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+).$$

Plus généralement,

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = p^n F(p) - p^{n-1}f(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+).$$

Attention

Les conditions initiales ne disparaissent pas : elles apparaissent explicitement dans la transformée des dérivées. C'est précisément l'un des grands intérêts de Laplace pour résoudre un problème physique avec état initial connu.

6.3 Intégration temporelle

Si $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$, alors

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{F(p)}{p}.$$

Une intégration temporelle correspond donc à une division par p .

6.4 Multiplication par une exponentielle : translation en p

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(p+a).$$

Exemple guidé

Comme $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \omega/(p^2 + \omega^2)$,

$$\mathcal{L}\{e^{-2t} \sin(3t)\} = \frac{3}{(p+2)^2 + 9}.$$

6.5 Retard temporel**Mini-exemple – alimentation appliquée après 2 s**

Une tension de 12 V appliquée seulement à partir de $t = 2$ s s'écrit

$$e(t) = 12u(t-2), \quad E(p) = \frac{12}{p}e^{-2p}.$$

Le facteur e^{-2p} code uniquement le retard temporel.

Pour $a > 0$,

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-ap}F(p).$$

Application GEII

Un retard pur de a secondes se traduit dans le domaine de Laplace par le facteur e^{-ap} . Cette propriété est importante en automatique, dans les systèmes de communication et pour modéliser un temps de transport.

6.6 Changement d'échelle

Pour $a > 0$,

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).$$

6.7 Multiplication par le temps

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF}{dp}.$$

Par exemple, à partir de $\mathcal{L}\{e^{-at}\} = 1/(p+a)$,

$$\mathcal{L}\{te^{-at}\} = \frac{1}{(p+a)^2}.$$

6.8 Signaux périodiques

Si f est T -périodique,

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{\int_0^T f(t)e^{-pt} dt}{1 - e^{-pT}}.$$

Cette formule permet de traiter des trains d'impulsions ou des signaux de commande périodiques.

6.9 Produit de convolution

Mini-exemple – premier ordre

Pour $h(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}u(t)$ et une entrée $e(t) = E_0u(t)$,

$$s(t) = (h * e)(t) = E_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right) u(t).$$

On retrouve la forme classique d'une réponse indicielle du premier ordre.

Pour deux signaux causaux,

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau.$$

La propriété fondamentale est

$$\mathcal{L}\{f * g\} = F(p)G(p).$$

Dans les systèmes linéaires invariants, si $h(t)$ est la réponse impulsionnelle et $e(t)$ l'entrée, alors

$$s(t) = (h * e)(t) \iff S(p) = H(p)E(p).$$

7. Transformée de Laplace inverse

Pourquoi apprend-on cela ?

Après avoir résolu le problème dans le domaine de Laplace, l'ingénieur doit revenir au temps pour connaître une tension, un courant, une vitesse ou une position. La transformée inverse est donc l'étape qui redonne une **interprétation physique** au résultat.

La transformée inverse permet de retrouver $f(t)$ à partir de $F(p)$:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}.$$

En BUT GEII, la méthode principale consiste à reconnaître les formes usuelles et à décomposer les fractions rationnelles en éléments simples.

Méthode

Pour calculer $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$ lorsque F est rationnelle :

1. vérifier que le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, sinon effectuer une division ;
2. factoriser le dénominateur ;
3. décomposer en éléments simples ;
4. identifier chaque terme dans la table ;
5. vérifier si possible par valeur initiale/finale ou recombinaison.

7.1 Pôles réels simples**Exemple guidé – deux pôles réels**

Soit

$$F(p) = \frac{3}{p(p+3)}.$$

On cherche A, B tels que

$$\frac{3}{p(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3}.$$

Donc $3 = A(p+3) + Bp$. Pour $p = 0$, $A = 1$; pour $p = -3$, $B = -1$. Ainsi

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+3} \Rightarrow \boxed{f(t) = 1 - e^{-3t}}.$$

7.2 Pôles réels multiples

Si

$$F(p) = \frac{A}{p+a} + \frac{B}{(p+a)^2} + \frac{C}{(p+a)^3},$$

alors

$$f(t) = Ae^{-at} + Bte^{-at} + \frac{C}{2}t^2e^{-at}.$$

7.3 Pôles complexes conjugués

Une forme

$$\frac{Ap + B}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2}$$

se réécrit en complétant le carré. Pour $0 < \zeta < 1$,

$$p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2 = (p + \zeta\omega_0)^2 + \omega_d^2, \quad \omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}.$$

On retrouve alors une combinaison d'exponentielle amortie, sinus et cosinus.

8. Théorèmes des valeurs initiale et finale

Sous les hypothèses d'existence appropriées,

$$\boxed{f(0^+) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p)}.$$

Pour la valeur finale, lorsque le système possède effectivement une limite stable,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p).$$

Attention

Le théorème de la valeur finale ne doit pas être appliqué aveuglément. Si la réponse diverge ou oscille indéfiniment, la limite temporelle n'existe pas. En pratique des systèmes linéaires rationnels, on vérifie notamment que les pôles responsables de la dynamique sont dans le demi-plan gauche, hors éventuel pôle simple à l'origine traité par $pF(p)$.

Exemple guidé

Pour $F(p) = 5/[p(1 + 0,2p)]$,

$$f(0^+) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{5}{1 + 0,2p} = 0, \quad f(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{5}{1 + 0,2p} = 5.$$

On reconnaît la réponse d'un premier ordre à un échelon d'amplitude 5.

9. Résolution des équations différentielles par Laplace

Pourquoi apprend-on cela ?

C'est l'application centrale du chapitre : passer d'un modèle temporel avec dérivées à une équation algébrique, tout en intégrant naturellement les conditions initiales. Cette démarche sera réutilisée en automatique, électronique, électrotechnique et modélisation des systèmes.

Méthode

Pour résoudre une équation différentielle avec conditions initiales :

1. noter $X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\}$;
2. transformer chaque terme en conservant les conditions initiales ;
3. isoler $X(p)$;
4. simplifier et décomposer en éléments simples ;
5. appliquer la transformée inverse ;
6. contrôler $x(0^+)$ et, si pertinent, $x(+\infty)$.

Premier ordre avec condition initiale

Résolvons

$$\tau x'(t) + x(t) = KE u(t), \quad x(0^+) = x_0.$$

Après transformation :

$$\tau[pX(p) - x_0] + X(p) = \frac{KE}{p}.$$

Donc

$$X(p) = \frac{\tau x_0}{1 + \tau p} + \frac{KE}{p(1 + \tau p)}.$$

Or

$$\frac{KE}{p(1 + \tau p)} = KE \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/\tau} \right).$$

Finalement,

$$x(t) = KE + (x_0 - KE)e^{-t/\tau}.$$

La réponse évolue exponentiellement de x_0 vers KE avec constante de temps τ .

Second ordre non amorti

Considérons

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = E u(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Alors

$$(p^2 + \omega_0^2)X(p) = \frac{E}{p}, \quad X(p) = \frac{E}{p(p^2 + \omega_0^2)}.$$

On écrit

$$X(p) = \frac{E}{\omega_0^2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \right),$$

d'où

$$x(t) = \frac{E}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t).$$

10. Application 1 – Circuit RC : charge d'un condensateur

10.1 Modèle temporel

Considérons un circuit série R - C soumis à une tension $e(t)$, avec sortie $u_C(t)$. Les lois électriques donnent

$$e(t) = u_R(t) + u_C(t), \quad u_R = Ri, \quad i = C \frac{du_C}{dt}.$$

Donc

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = e(t).$$

La constante de temps est $\tau = RC$.

10.2 Réponse à un échelon

Pour $e(t) = Eu(t)$ et $u_C(0) = 0$,

$$(1 + RCp)U_C(p) = \frac{E}{p},$$

d'où

$$U_C(p) = \frac{E}{p(1 + RCp)} = E \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/(RC)} \right).$$

Ainsi

$$u_C(t) = E \left(1 - e^{-t/(RC)} \right) u(t).$$

Application GEII – valeurs numériques

Prenons $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$ et $E = 5 \text{ V}$. Alors $\tau = RC = 1 \text{ s}$.

$$u_C(t) = 5(1 - e^{-t}) \text{ V}.$$

À $t = \tau$, $u_C \simeq 0,632E = 3,16 \text{ V}$. À 3τ , on atteint environ 95% de la valeur finale ; à 5τ , environ 99,3%.

10.3 Fonction de transfert du RC

Sous conditions initiales nulles,

$$H(p) = \frac{U_C(p)}{E(p)} = \boxed{\frac{1}{1 + RCp}}.$$

Le pôle est $p = -1/(RC)$: il est réel négatif, donc la réponse libre décroît vers zéro.

11. Application 2 – Circuit RL : établissement du courant

Pour un circuit série R - L ,

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}.$$

Sous conditions initiales nulles,

$$(R + Lp)I(p) = E(p).$$

Pour $e(t) = Eu(t)$,

$$I(p) = \frac{E}{p(R + Lp)}.$$

En posant $\tau = L/R$,

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)}, \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

Application GEII

Avec $R = 20 \Omega$, $L = 200 \text{ mH}$ et $E = 10 \text{ V}$: $\tau = L/R = 10 \text{ ms}$ et $i(+\infty) = E/R = 0,5 \text{ A}$.

12. Application 3 – Circuit RLC série : système du second ordre

Pour un RLC série, en choisissant la charge $q(t)$ comme variable,

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = e(t).$$

En divisant par L :

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}e(t).$$

On identifie la pulsation propre et le coefficient d'amortissement :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad 2\zeta\omega_0 = \frac{R}{L}, \quad \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Trois comportements sont possibles :

- $\zeta > 1$: régime apériodique, deux pôles réels négatifs ;
- $\zeta = 1$: régime critique, pôle réel double ;
- $0 < \zeta < 1$: régime pseudo-périodique, deux pôles complexes conjugués à partie réelle négative.

Application GEII

Cette classification explique physiquement pourquoi un circuit RLC peut présenter ou non des oscillations transitoires. La position des pôles dans le plan complexe donne directement la nature de la dynamique.

13. Application 4 – Modèle mécanique masse–ressort–amortisseur

Le système mécanique

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F(t)$$

est l'analogie directe d'un système électrique du second ordre. Sous conditions initiales nulles,

$$(mp^2 + cp + k)X(p) = F(p),$$

et donc

$$H(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{1}{mp^2 + cp + k}.$$

On identifie

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}.$$

Rappel / point clé

Même outil, plusieurs domaines : un circuit RLC, une suspension mécanique ou certains modèles de moteurs ont des équations de même structure. La transformée de Laplace permet de raisonner avec une méthode commune.

14. Fonction de transfert et lecture physique

Pourquoi apprend-on cela ?

La fonction de transfert condense le comportement dynamique d'un système linéaire. À partir de son dénominateur et de ses pôles, on peut anticiper rapidité, stabilité et caractère oscillatoire avant même de calculer complètement la réponse temporelle.

Pour un système linéaire invariant décrit sous conditions initiales nulles, on définit

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}.$$

Si

$$H(p) = K \frac{(p - z_1) \cdots (p - z_m)}{(p - p_1) \cdots (p - p_n)},$$

les z_i sont les **zéros** et les p_i les **pôles**.

À retenir

Les pôles gouvernent fortement la dynamique libre et la stabilité. Un pôle réel $-a$ produit typiquement un terme e^{-at} . Une paire $-a \pm j\omega$ produit une oscillation amortie $e^{-at} \cos(\omega t)$ ou $e^{-at} \sin(\omega t)$.

14.1 Premier ordre canonique

Mini-exemple – lecture immédiate

Pour $H(p) = \frac{4}{1 + 0.02p}$, le gain statique vaut $K = 4$ et la constante de temps $\tau = 20$ ms. À $t = 3\tau = 60$ ms, la réponse à un échelon a réalisé environ 95% de sa variation finale.

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}.$$

Pour un échelon unité,

$$s(t) = K(1 - e^{-t/\tau}).$$

K est le gain statique et τ la constante de temps.

14.2 Second ordre canonique

Mini-exemple – amortissement

Pour $H(p) = \frac{100}{p^2 + 6p + 100}$, on identifie $\omega_0 = 10$ rad/s et $2\zeta\omega_0 = 6$, donc $\zeta = 0.3$. Comme $0 < \zeta < 1$, la réponse transitoire est pseudo-périodique et présente des oscillations amorties.

$$H(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2}.$$

K est le gain statique, ω_0 la pulsation propre non amortie et ζ le coefficient d'amortissement.

15. Signaux retardés et commandes par morceaux

Pourquoi apprend-on cela ?

Les systèmes réels sont rarement sollicités uniquement à $t = 0$. Une commande peut démarrer après quelques secondes, changer de valeur ou s'arrêter. L'échelon retardé permet d'écrire ces scénarios de façon compacte et directement exploitable par Laplace.

Échelon retardé

Une tension de 5 V est appliquée à $t = 3$ s :

$$e(t) = 5u(t - 3), \quad E(p) = \frac{5e^{-3p}}{p}.$$

Pour un premier ordre $H(p) = 1/(1 + \tau p)$, la sortie est

$$s(t) = 5 \left(1 - e^{-(t-3)/\tau} \right) u(t - 3).$$

Le système ne réagit pas avant $t = 3$ s.

Créneau unique

Une commande E est appliquée de $t = a$ à $t = b$:

$$e(t) = E[u(t - a) - u(t - b)],$$

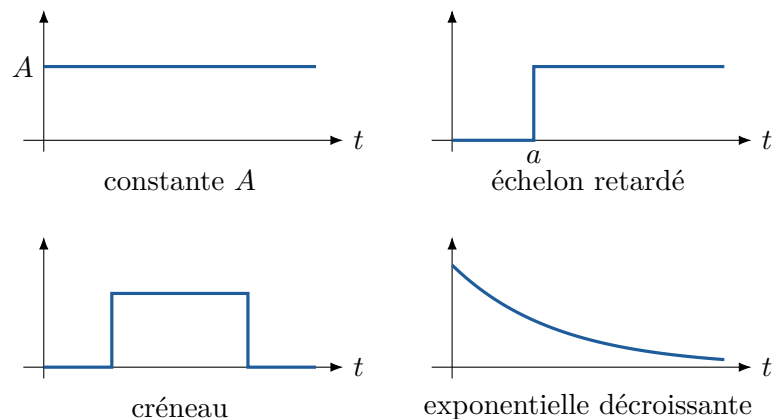
$$E(p) = \frac{E}{p}(e^{-ap} - e^{-bp}).$$

La réponse est la différence de deux réponses indicielle retardées.

16. Lire les signaux avant de calculer

Avant d'appliquer une formule, il est essentiel de comprendre la forme temporelle du signal. En GEII, une grande partie des erreurs vient d'une mauvaise traduction du chronogramme en expression mathématique.

16.1 Les quatre signaux élémentaires à reconnaître

**Méthode – passer d'un chronogramme à une expression**

1. Repérer les instants où le signal change de définition.
2. Construire le signal comme somme d'échelons retardés.
3. Vérifier l'expression sur chaque intervalle temporel.
4. Seulement ensuite appliquer la transformée de Laplace.

Exemple – impulsion rectangulaire

Un générateur délivre 8 V entre $t = 1$ s et $t = 4$ s et 0 V ailleurs. On écrit

$$e(t) = 8[u(t - 1) - u(t - 4)].$$

Par la propriété de retard,

$$E(p) = \frac{8}{p}(e^{-p} - e^{-4p}).$$

On voit ainsi qu'une commande temporelle par morceaux devient une expression algébrique compacte.

17. D'où viennent les formules essentielles ?

Le support de cours peut être utilisé comme formulaire, mais comprendre quelques démonstrations rend les propriétés beaucoup plus faciles à mémoriser.

17.1 Dérivée : démonstration par intégration par parties

Partons de

$$\mathcal{L}\{f'\} = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt} dt.$$

Une intégration par parties donne

$$\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt} dt = \left[f(t)e^{-pt} \right]_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

Sous les hypothèses usuelles de convergence, le terme à l'infini est nul. Il reste

$$\boxed{\mathcal{L}\{f'\} = pF(p) - f(0^+)}.$$

Cette formule explique pourquoi Laplace est si efficace pour les systèmes dynamiques : la dérivation devient une multiplication par p , à laquelle s'ajoute l'information d'état initial.

17.2 Retard : pourquoi apparaît e^{-ap} ?

Soit $g(t) = f(t-a)u(t-a)$. Alors

$$G(p) = \int_a^{+\infty} f(t-a)e^{-pt} dt.$$

En posant $\tau = t - a$, on obtient

$$G(p) = e^{-ap} \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau} d\tau = \boxed{e^{-ap}F(p)}.$$

Le facteur exponentiel contient donc directement l'information de retard.

18. Transformée inverse et DES : mise en pratique

Le chapitre 1 a établi la méthode générale de décomposition en éléments simples. Dans le domaine de Laplace, on applique exactement la même démarche à la variable p . Une fois $F(p)$ décomposée, chaque terme est associé à une forme de la table.

Exemple – retour au temps

$$F(p) = \frac{2p+5}{(p+1)(p+3)} = \frac{3/2}{p+1} + \frac{1/2}{p+3}.$$

Ainsi

$$\boxed{f(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}}.$$

Les pôles -1 et -3 produisent deux modes exponentiels décroissants.

Rappel / point clé

Pour un pôle multiple,

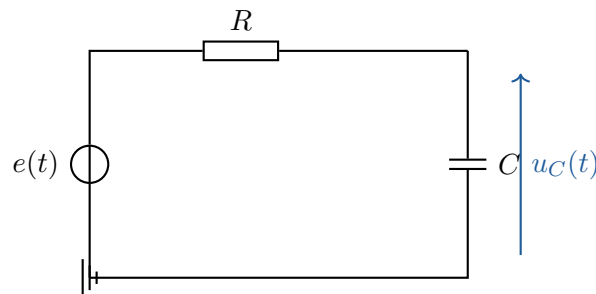
$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(p+a)^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}.$$

Pour un facteur quadratique, on complète le carré et on fait apparaître $p+a$ au numérateur afin d'identifier sinus et cosinus amortis.

19. Exemple fil rouge – du circuit électrique à la réponse temporelle

On étudie entièrement un filtre RC passe-bas. Cet exemple rassemble la démarche attendue en BUT GEII : modèle physique, équation différentielle, passage dans le domaine de Laplace, fonction de transfert, calcul de la réponse et interprétation.

19.1 Étape 1 – schéma et choix des grandeurs



Sortie mesurée aux bornes du condensateur

L'entrée est $e(t)$ et la sortie est $s(t) = u_C(t)$.

19.2 Étape 2 – modèle temporel

La loi des mailles donne

$$e(t) = u_R(t) + u_C(t).$$

Avec $u_R = Ri$ et $i = C \, du_C / dt$,

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = e(t).$$

On reconnaît un système du premier ordre de constante de temps $\tau = RC$.

19.3 Étape 3 – passage dans le domaine de Laplace

Pour établir la fonction de transfert, on prend les conditions initiales nulles :

$$RC pU_C(p) + U_C(p) = E(p).$$

Ainsi

$$H(p) = \frac{U_C(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + RCp}.$$

Le dénominateur s'annule pour

$$p_1 = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}.$$

Ce pôle réel négatif annonce une exponentielle décroissante et donc un régime transitoire stable.

19.4 Étape 4 – réponse à un échelon

Pour $e(t) = E_0 u(t)$,

$$E(p) = \frac{E_0}{p}, \quad U_C(p) = \frac{E_0}{p(1 + \tau p)}.$$

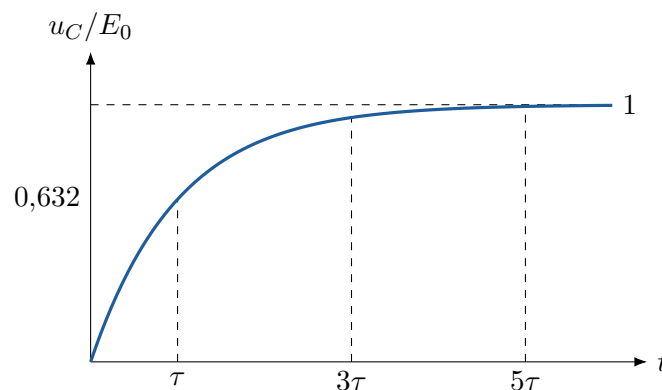
La DES donne

$$U_C(p) = E_0 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/\tau} \right),$$

d'où

$$u_C(t) = E_0(1 - e^{-t/\tau})u(t).$$

19.5 Étape 5 – lecture graphique et physique



À $t = \tau$, la sortie a parcouru 63,2% du chemin vers sa valeur finale. À 3τ , elle est à environ 95%; à 5τ , à plus de 99%.

Dimensionnement concret

Avec $R = 4,7 \text{ k}\Omega$ et $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$,

$$\tau = RC = 0,47 \text{ s}.$$

Pour un échelon de 12 V,

$$u_C(t) = 12(1 - e^{-t/0.47}) \text{ V}.$$

On prévoit $u_C(0.47) \simeq 7.58 \text{ V}$, $u_C(1.41) \simeq 11.40 \text{ V}$ et une charge pratiquement terminée vers 2.35 s. Ces valeurs peuvent être vérifiées directement à l'oscilloscope.

19.6 Étape 6 – même circuit avec condensateur préchargé

Supposons maintenant $u_C(0^+) = U_0$. La transformée de la dérivée donne

$$RC[pU_C(p) - U_0] + U_C(p) = \frac{E_0}{p}.$$

On obtient

$$u_C(t) = E_0 + (U_0 - E_0)e^{-t/RC}.$$

Le condensateur ne “repart” donc pas artificiellement de zéro : Laplace conserve l'énergie initialement stockée à travers la condition initiale.

20. Second ordre : comprendre les pôles plutôt que mémoriser

Considérons le dénominateur canonique

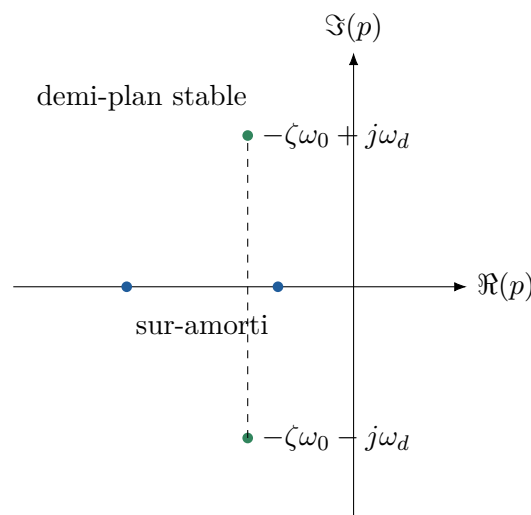
$$D(p) = p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2.$$

Ses pôles sont

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

La valeur de ζ change donc directement la nature des pôles et, par conséquent, la forme de la réponse temporelle.

ζ	Pôles	Réponse typique
$\zeta > 1$	deux réels négatifs	somme de deux exponentielles décroissantes
$\zeta = 1$	réel double	$(A + Bt)e^{-\omega_0 t}$
$0 < \zeta < 1$	complexes conjugués	oscillation amortie
$\zeta = 0$	imaginaires purs	oscillation non amortie



21. Application détaillée – RLC série et réponse transitoire

Pour le circuit RLC série, la tension de sortie aux bornes du condensateur vérifie

$$LC u_C'' + RC u_C' + u_C = e(t).$$

Sous conditions initiales nulles,

$$H(p) = \frac{U_C(p)}{E(p)} = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1} = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2},$$

avec

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Exemple numérique – prédire le comportement avant tout calcul inverse

Prenons $L = 100 \text{ mH}$, $C = 100 \mu\text{F}$ et $R = 20 \Omega$. Alors

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0.1 \times 10^{-4}}} \approx 316.2 \text{ rad s}^{-1}, \quad \zeta \approx 0.316.$$

Comme $0 < \zeta < 1$, la réponse est pseudo-périodique. La pulsation amortie vaut

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \approx 300 \text{ rad s}^{-1}.$$

L'enveloppe décroît comme $e^{-\zeta\omega_0 t} \approx e^{-100t}$. Avant même la DES, on connaît donc la nature de la réponse, sa fréquence d'oscillation approximative et la vitesse de décroissance de son enveloppe.

22. Convolution et réponse impulsionnelle : sens physique**Pourquoi apprend-on cela ?**

La convolution relie l'entrée, la réponse impulsionnelle et la sortie. Elle donne une lecture fondamentale des systèmes LTI ^a : la sortie est la superposition des réponses du système aux contributions élémentaires de l'entrée.

^a. Un système LTI (*Linear Time-Invariant*) est un système **linéaire** et **invariant dans le temps**. La linéarité signifie qu'il respecte le principe de superposition : la réponse à une combinaison linéaire d'entrées est la même combinaison linéaire des réponses correspondantes. L'invariance temporelle signifie que les propriétés du système ne changent pas avec le temps : si une entrée est retardée, la sortie est retardée de la même quantité, sans modification de sa forme. Les circuits électriques RLC à composants constants constituent des exemples classiques de systèmes LTI.

Si un système LTI possède une fonction de transfert $H(p)$, sa réponse impulsionnelle est

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\}.$$

Pour une entrée quelconque $e(t)$,

$$S(p) = H(p)E(p) \quad \Longleftrightarrow \quad s(t) = (h * e)(t) = \int_0^t h(t - \tau)e(\tau) d\tau.$$

Premier ordre

Pour

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} = \frac{K/\tau}{p + 1/\tau},$$

on a

$$h(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau} u(t).$$

La sortie est donc une somme continue des effets des valeurs passées de l'entrée, pondérées par une mémoire exponentiellement décroissante. Plus τ est grande, plus le système “se souvient” longtemps de son passé.

23. Exemples supplémentaires en physique et en GEII

23.1 Capteur thermique du premier ordre

Un capteur de température peut être modélisé par

$$\tau \frac{dT_m}{dt} + T_m = T_a,$$

où T_a est la température ambiante réelle et T_m la température mesurée. Pour un changement brusque de 20°C à 50°C,

$$T_m(t) = 50 + (20 - 50)e^{-t/\tau}.$$

La constante de temps représente ici l'inertie thermique du capteur.

23.2 Vitesse d'un moteur à courant continu – modèle simplifié

Si l'on néglige certaines dynamiques électriques, la vitesse peut suivre

$$\tau_m \dot{\Omega} + \Omega = K_m u(t).$$

Pour une tension constante U_0 ,

$$\Omega(t) = K_m U_0 + (\Omega_0 - K_m U_0)e^{-t/\tau_m}.$$

La même structure mathématique décrit donc charge d'un condensateur, échauffement d'un capteur et établissement d'une vitesse.

23.3 Masse–ressort–amortisseur

Pour

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t),$$

les pôles sont les racines de $mp^2 + cp + k$. Leur position permet de prédire si un déplacement revient lentement à l'équilibre, revient sans oscillation au régime critique ou oscille avant de se stabiliser.

Le message transversal

En GEII, il faut apprendre à reconnaître les *structures* : premier ordre, second ordre, retard, intégrateur. Des systèmes physiquement très différents peuvent alors être étudiés avec exactement les mêmes outils de Laplace.

24. Mini-bilan de compétences avant les TD

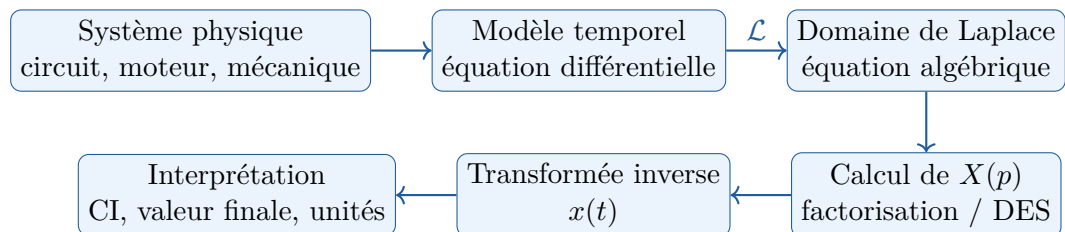
À la fin du cours, un étudiant doit pouvoir réaliser sans aide les opérations suivantes :

- traduire un chronogramme simple avec $u(t - a)$;
- calculer une transformée par table et propriétés ;
- prendre en compte correctement $f(0^+)$ et $f'(0^+)$;
- calculer une transformée inverse par DES ;
- résoudre une équation différentielle du premier ou du second ordre ;
- établir une fonction de transfert sous conditions initiales nulles ;
- associer un pôle réel négatif à une exponentielle décroissante ;
- associer des pôles complexes conjugués à une oscillation amortie ;
- vérifier une réponse avec les valeurs initiale et finale et avec les unités.

25. Erreurs fréquentes et bonnes pratiques

Attention

- Oublier $f(0^+)$ dans $\mathcal{L}\{f'\}$ conduit presque toujours à une mauvaise solution.
- Confondre $\mathcal{L}\{f(t-a)\}$ et $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}$: la propriété de retard s'applique au signal causal retardé.
- Écrire $\mathcal{L}\{fg\} = FG$ est faux en général. C'est la *convolution* qui devient un produit.
- Une valeur finale calculée algébriquement n'a de sens que si la limite temporelle existe.
- Lors d'une transformée inverse, penser à compléter le carré pour reconnaître les formes sinus/cosinus amorties.
- Toujours vérifier les unités : p a la dimension d'une fréquence, en s^{-1} ; ainsi τp est sans dimension.

26. Synthèse méthodologique**À retenir**

La transformée de Laplace n'est pas seulement une technique de calcul : c'est un langage commun pour passer d'un modèle physique temporel à une représentation algébrique, puis lire la dynamique d'un système à travers ses pôles, ses zéros, son gain et ses constantes de temps.

27. Formulaire récapitulatif

Temps	Laplace
$f(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$1/p$
$t^n u(t)$	$n!/p^{n+1}$
$e^{-at}u(t)$	$1/(p+a)$
$\sin(\omega t)u(t)$	$\omega/(p^2 + \omega^2)$
$\cos(\omega t)u(t)$	$p/(p^2 + \omega^2)$
$\lambda f + \mu g$	$\lambda F + \mu G$
$f'(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
$f''(t)$	$p^2 F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$
$\int_0^t f(\tau) \, d\tau$	$F(p)/p$
$e^{-at}f(t)$	$F(p+a)$
$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a}F(p/a)$
$tf(t)$	$-F'(p)$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$
$(f * g)(t)$	$F(p)G(p)$
f T -périodique	$\frac{\int_0^T f(t)e^{-pt} \, dt}{1 - e^{-pT}}$