

Nombres complexes

Support de cours – Outils mathématiques et Logiciel

BUT GEII – Semestre 1

H. Hadj-Abdelkader, S. Ahmed-Ali, P. Hoppenot & M. Houkari

Ce chapitre présente les bases nécessaires pour manipuler les nombres complexes : forme algébrique, conjugué, module et argument, représentation géométrique, forme trigonométrique et exponentielle, formules de Moivre et d'Euler, ainsi que la résolution d'équations dans $\mathbb{C}$. Ces outils sont particulièrement utiles en GEII pour l'étude des signaux sinusoïdaux et, plus généralement, des systèmes électriques et automatiques.

Table des matières

1 Pourquoi introduire les nombres complexes ?	3
2 Forme algébrique	3
2.1 Définition	3
2.2 Égalité de deux nombres complexes	3
3 Calculs algébriques dans $\mathbb{C}$	4
3.1 Addition et soustraction	4
3.2 Produit	4
3.3 Puissances de i	4
4 Conjugué d'un nombre complexe	4
4.1 Utiliser le conjugué pour effectuer une division	5
5 Représentation dans le plan complexe	5
6 Module et argument	6
6.1 Module	6
6.2 Argument	6
7 Formes trigonométrique et exponentielle	7
7.1 Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle	7
7.2 Passer de la forme exponentielle à la forme algébrique	8
8 Propriétés du module et de l'argument	8
9 Calculs efficaces avec la forme exponentielle	9
10 Formule de Moivre	9
11 Formules d'Euler	10
12 Nombres complexes et trigonométrie	10
12.1 Parité	10
12.2 Formules d'addition	10
13 Équations du second degré dans $\mathbb{C}$	10
14 Racines de l'unité : prolongement	11
15 Exercices d'application	12
16 Indications pour les exercices 6 et 7	13

17 Fiche de synthèse**14**

1 Pourquoi introduire les nombres complexes ?

Dans $\mathbb{R}$, le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul :

$$x \in \mathbb{R} \implies x^2 \geq 0.$$

L'équation $x^2 = -1$ n'admet donc aucune solution réelle. On introduit un nouveau nombre, noté i , défini par

Définition

$$i^2 = -1, \quad i \notin \mathbb{R}.$$

L'ensemble des nombres construits à partir des réels et de i est appelé **ensemble des nombres complexes** et est noté $\mathbb{C}$.

On a l'inclusion

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Ainsi, tout nombre réel est également un nombre complexe.

2 Forme algébrique

2.1 Définition

Définition

Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme

$$z = x + iy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Cette écriture est appelée **forme algébrique** de z .

Dans cette écriture :

$$\operatorname{Re}(z) = x, \quad \operatorname{Im}(z) = y.$$

Attention : la partie imaginaire $\operatorname{Im}(z)$ est le réel y , et non iy .

Propriété

Soit $z = x + iy$.

- Si $y = 0$, alors $z = x \in \mathbb{R}$: z est réel.
- Si $x = 0$ et $y \neq 0$, alors $z = iy$: z est un imaginaire pur.
- $z = 0$ si et seulement si $x = 0$ et $y = 0$.

2.2 Égalité de deux nombres complexes

Propriété

Pour $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$,

$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \text{ et } y_1 = y_2.$$

Autrement dit, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires sont égales.

Exemple

Si

$$(2a - 1) + i(3b + 2) = 5 - 4i,$$

alors, par identification,

$$2a - 1 = 5, \quad 3b + 2 = -4,$$

d'où $a = 3$ et $b = -2$.

3 Calculs algébriques dans $\mathbb{C}$

Les règles usuelles de calcul dans $\mathbb{R}$ restent valables, en utilisant systématiquement $i^2 = -1$.

3.1 Addition et soustraction

Pour $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$,

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d),$$

$$z_1 - z_2 = (a - c) + i(b - d).$$

3.2 Produit

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd,$$

donc

Propriété

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Exemple

$$(2 + 3i)(1 - 4i) = 2 - 8i + 3i - 12i^2 = 14 - 5i.$$

3.3 Puissances de i

Les puissances de i sont périodiques de période 4 :

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1.$$

Ainsi $i^{n+4} = i^n$.

4 Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Si

$$z = x + iy,$$

le **conjugué** de z , noté $\bar{z}$, est

$$\bar{z} = x - iy.$$

Propriété

Pour $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\bar{z}) &= \operatorname{Re}(z), & \operatorname{Im}(\bar{z}) &= -\operatorname{Im}(z), \\ z + \bar{z} &= 2\operatorname{Re}(z), & z - \bar{z} &= 2i\operatorname{Im}(z), \\ \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2, & \overline{z_1 z_2} &= \bar{z}_1 \bar{z}_2, \\ \overline{z^n} &= \bar{z}^n, & \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0). \end{aligned}$$

Propriété

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}.$$

Pour $z \neq 0$,

$$z \text{ imaginaire pur} \iff z = -\bar{z}.$$

4.1 Utiliser le conjugué pour effectuer une division

Méthode

Pour mettre un quotient sous forme algébrique, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)}.$$

Le dénominateur devient réel car

$$(c + id)(c - id) = c^2 + d^2.$$

Exemple

$$\frac{1 + 2i}{3 - i} = \frac{(1 + 2i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{1 + 7i}{10} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i.$$

5 Représentation dans le plan complexe

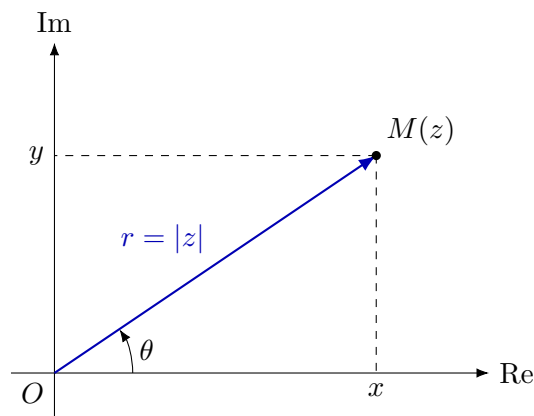
Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est identifié à $\mathbb{C}$.

Définition

Au nombre complexe

$$z = x + iy$$

on associe le point $M(x, y)$. On dit que z est l'**affixe** de M et que M est l'**image** de z .



Si A et B ont pour affixes z_A et z_B , alors

Propriété

$$AB = |z_B - z_A|.$$

6 Module et argument

6.1 Module

Pour $z = x + iy$, le point $M(z)$ est à la distance

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

de l'origine.

Définition

Le **module** de $z = x + iy$ est

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Propriété

$$z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2.$$

En particulier, si $z \neq 0$,

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

6.2 Argument

Pour $z \neq 0$, on note θ un angle orienté entre l'axe réel positif et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Définition

Un **argument** de $z \neq 0$ est un réel θ tel que

$$\cos \theta = \frac{x}{|z|}, \quad \sin \theta = \frac{y}{|z|}.$$

Tous les arguments de z sont de la forme

$$\theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Attention

Le nombre complexe 0 a un module nul, mais on ne lui attribue pas d'argument. L'argument est défini pour $z \neq 0$.

7 Formes trigonométrique et exponentielle

Pour $z = x + iy \neq 0$, posons $r = |z|$ et soit θ un argument de z . Comme

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

on obtient

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta.$$

Définition

La **forme trigonométrique** de z est

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad r > 0.$$

Avec la notation d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

la **forme exponentielle** devient

$$z = re^{i\theta}.$$

7.1 Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle

Méthode

Pour $z = x + iy \neq 0$:

1. calculer le module $r = \sqrt{x^2 + y^2}$;
2. déterminer le quadrant à partir des signes de x et y ;
3. déterminer un argument θ à l'aide de

$$\cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r}$$

(ou de la tangente en contrôlant le quadrant) ;

4. écrire $z = re^{i\theta}$.

Exemple

Pour $z = 1 + i$,

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Le point est dans le premier quadrant et $\cos \theta = \sin \theta = 1/\sqrt{2}$, donc $\theta = \pi/4$. Ainsi

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}.$$

Exemple

Pour $z = -\sqrt{3} + i$,

$$r = 2.$$

Le point est dans le deuxième quadrant et

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{1}{2},$$

d'où $\theta = 5\pi/6$. Ainsi

$$-\sqrt{3} + i = 2e^{i5\pi/6}.$$

7.2 Passer de la forme exponentielle à la forme algébrique

Méthode

Si $z = re^{i\theta}$, utiliser la formule d'Euler :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \cos \theta + ir \sin \theta.$$

8 Propriétés du module et de l'argument

Pour $z_1, z_2 \neq 0$:

Propriété

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2|, & \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}, \\ |z^n| &= |z|^n, & |\bar{z}| &= |z|. \end{aligned}$$

Pour les arguments, les égalités sont comprises modulo 2π :

Propriété

$$\begin{aligned} \arg(z_1 z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}, \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}, \\ \arg(z^n) &= n \arg z \pmod{2\pi}, & \arg(\bar{z}) &= -\arg z \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

Reconnaître un réel par son argument

Pour $z \neq 0$:

$$z > 0 \iff \arg z = 0 \pmod{2\pi},$$

$$z < 0 \iff \arg z = \pi \pmod{2\pi},$$

$$z \in \mathbb{R}^* \iff \arg z = 0 \pmod{\pi}.$$

9 Calculs efficaces avec la forme exponentielle

La forme exponentielle est particulièrement adaptée aux produits, quotients et puissances.

Si

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2},$$

alors

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

et, pour $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Application GEII

En GEII, l'écriture complexe est très pratique pour représenter des grandeurs sinusoïdales. Multiplier deux complexes revient à multiplier leurs modules et à additionner leurs phases ; effectuer un quotient revient à diviser les modules et à soustraire les phases. Cette propriété sera exploitée notamment dans l'étude des régimes sinusoïdaux.

10 Formule de Moivre

La notation exponentielle donne immédiatement

$$(e^{ix})^n = e^{inx}.$$

On en déduit :

Formule de Moivre

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx).$$

Exemple

Pour $n = 2$,

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x + 2i \sin x \cos x.$$

En identifiant avec $\cos 2x + i \sin 2x$, on retrouve

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

11 Formules d'Euler

On dispose de

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Par addition et soustraction :

Formules d'Euler

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Ces formules permettent notamment de linéariser des puissances de sinus et de cosinus.

Exemple

$$\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}).$$

Or $e^{2ix} + e^{-2ix} = 2 \cos 2x$, donc

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

12 Nombres complexes et trigonométrie

Les nombres complexes permettent de retrouver rapidement de nombreuses identités trigonométriques.

12.1 Parité

Comme

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x,$$

on obtient

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

12.2 Formules d'addition

À partir de

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy},$$

on obtient après développement et identification :

Propriété

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

13 Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Considérons

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On pose

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Propriété

— Si $\Delta > 0$, les deux solutions réelles sont

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

— Si $\Delta = 0$, la solution double est

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

— Si $\Delta < 0$, on écrit $\Delta = -D$ avec $D > 0$. Comme

$$(i\sqrt{D})^2 = -D = \Delta,$$

les solutions complexes sont

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemple

Résoudre $x^2 + x + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

$$\Delta = 1 - 4 = -3.$$

Ainsi

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Ces deux nombres ont pour module 1 et pour arguments respectifs $2\pi/3$ et $-2\pi/3$:

$$x_1 = e^{i2\pi/3}, \quad x_2 = e^{-i2\pi/3}.$$

Attention

Dans le cadre de ce cours, le symbole $\sqrt{}$ désigne la racine carrée réelle positive d'un réel positif ou nul. On évite donc des écritures telles que $\sqrt{-1}$ ou $\sqrt{i}$. Pour $\Delta < 0$, on écrit par exemple

$$\Delta = -D \quad (D > 0), \quad \delta = i\sqrt{D}.$$

14 Racines de l'unité : prolongement

Résoudre

$$z^n = 1$$

revient à écrire

$$z^n = e^{2ik\pi}.$$

Les n solutions sont

Propriété

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Leurs images sont régulièrement réparties sur le cercle unité.

Racines cubiques de l'unité

Les solutions de $z^3 = 1$ sont

$$1, \quad e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e^{i4\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Leurs images forment un triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité.

15 Exercices d'application

Exercice 1 – Forme trigonométrique

Donner une forme trigonométrique puis exponentielle des nombres suivants :

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = 1 + i, \quad z_4 = 1 - i, \quad z_5 = \sqrt{3} + i, \quad z_6 = 1 + i\sqrt{3}.$$

Exercice 2 – Puissances

Calculer :

$$\begin{aligned} z_1 &= (1 + i)^{20}, & z_2 &= (1 - i)^{20}, \\ z_3 &= \left(\frac{i+1}{i-1}\right)^{10}, & z_4 &= \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{20}. \end{aligned}$$

Exercice 3 – Formes algébrique et trigonométrique

On considère

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = \sqrt{3} + i, \quad z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. Écrire z_3 sous forme algébrique.
2. Écrire z_1, z_2 puis z_3 sous forme trigonométrique.
3. En déduire $\cos(\pi/12)$, $\sin(\pi/12)$ et $\tan(\pi/12)$.

Exercice 4 – Équation du second degré

Dans $\mathbb{C}$, résoudre

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Donner les formes algébrique et exponentielle des solutions puis représenter leurs images dans le plan complexe.

Exercice 5 – Racines cubiques de l'unité

1. Vérifier

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^3 = 1$.
3. Représenter les trois solutions dans le plan complexe. Quelle est la nature du triangle formé ?

Exercice 6 – Module

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Calculer

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2.$$

Exercice 7 – Réalité d’une expression

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, tel que $|z| = 1$. Montrer que

$$\mathrm{i} \frac{z + 1}{z - 1}$$

est réel.

16 Indications pour les exercices 6 et 7**Exercice 6**

Utiliser $|w|^2 = w\bar{w}$ et $z\bar{z} = |z|^2 = 1$:

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = (1 + z)(1 + \bar{z}) + (1 - z)(1 - \bar{z}).$$

Après développement, les termes croisés s’annulent et le résultat vaut

$$\boxed{4}.$$

Exercice 7

Posons

$$Z = \mathrm{i} \frac{z + 1}{z - 1}.$$

Comme $|z| = 1$, on a $\bar{z} = 1/z$. En calculant $\bar{Z}$ et en simplifiant, on obtient

$$\bar{Z} = Z,$$

donc

$$\boxed{Z \in \mathbb{R}}.$$

17 Fiche de synthèse

À savoir faire

À l'issue du chapitre, on doit savoir :

- écrire un nombre complexe sous la forme $x + iy$ et identifier ses parties réelle et imaginaire ;
- effectuer des sommes, produits, quotients et puissances dans $\mathbb{C}$;
- utiliser le conjugué et la relation $z\bar{z} = |z|^2$;
- représenter un complexe dans le plan et calculer son module ;
- déterminer un argument en tenant compte du quadrant ;
- passer des formes algébrique, trigonométrique et exponentielle de l'une à l'autre ;
- calculer efficacement produits, quotients et puissances en forme exponentielle ;
- utiliser les formules de Moivre et d'Euler ;
- résoudre une équation du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$;
- reconnaître et représenter les racines de l'unité.