

Travaux dirigés – Outils mathématiques

Décomposition en éléments simples et transformée de Laplace

H. Hadj-Abdelkader et S. Ahmed-Ali

Série 1 – DES

Objectifs pédagogiques

Cette série a pour objectif de faire acquérir progressivement les automatismes nécessaires à la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$. À l'issue des TD, l'étudiant doit être capable de :

- analyser une fraction rationnelle avant tout calcul : degrés, factorisation, pôles et multiplicités ;
- déterminer la partie entière lorsqu'elle existe ;
- écrire sans erreur la forme générale de la DES dans $\mathbb{R}$;
- choisir une méthode efficace pour calculer les coefficients ;
- traiter les pôles réels simples ou multiples et les facteurs quadratiques irréductibles ;
- vérifier une décomposition par recomposition ;
- utiliser la DES pour calculer une primitive ou une transformée inverse de Laplace.

Méthode de travail

Pour chaque exercice de décomposition, suivre autant que possible la démarche suivante :

1. comparer les degrés du numérateur et du dénominateur ;
2. effectuer la division euclidienne si nécessaire ;
3. factoriser complètement le dénominateur dans $\mathbb{R}$;
4. identifier les pôles et leur multiplicité ;
5. écrire la forme générale de la DES ;
6. calculer les coefficients en privilégiant la multiplication/simplification et les valeurs particulières ;
7. vérifier le résultat par recomposition.

- ★ application directe / automatisme
★★ exercice intermédiaire / plusieurs étapes
★★★ exercice de synthèse / stratégie complète

TD 1 – Lire la structure avant de calculer

Exercice 1 – Zéros, pôles, multiplicités et partie entière ★

Pour chacune des fractions suivantes :

- déterminer les zéros ;
- déterminer les pôles et leur multiplicité ;
- indiquer si une partie entière non nulle est nécessaire ;
- sans calculer les coefficients, prévoir la nature des termes qui apparaîtront dans la DES.

$$F_1(x) = \frac{x-2}{(x+1)(x-3)}, \quad F_2(x) = \frac{x^2+1}{(x-2)^2},$$

$$F_3(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}, \quad F_4(x) = \frac{2x+1}{(x^2+4)(x-1)}.$$

Exercice 2 – Écrire seulement la forme de la DES ★

Sans calculer les coefficients, écrire dans $\mathbb{R}$ la forme générale de la DES de chacune des fractions :

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)}, \quad \frac{1}{(x-1)^3(x+2)},$$

$$\frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)}, \quad \frac{1}{(x^2+2x+2)^2(x+3)}.$$

Pour chaque cas, justifier brièvement le nombre de termes et le degré des numérateurs.

Conseil

Ce premier TD doit pouvoir être réalisé sans aucun calcul lourd. L'objectif est de savoir **prévoir la forme de la réponse** avant de chercher les coefficients.

TD 2 – Pôles réels simples

Exercice 3 – Premières décompositions ★

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$:

$$F_1(x) = \frac{-x-3}{x^2+3x+2}, \quad F_2(x) = \frac{-5x+11}{x^2-4x+3},$$

$$F_3(x) = \frac{x-4}{x^2+x-2}, \quad F_4(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+2}.$$

Pour chacune, commencer par factoriser le dénominateur puis déterminer les coefficients par multiplication/simplification.

Exercice 4 – Trois pôles simples ★★

Décomposer complètement

$$F(x) = \frac{x^2 - 6x - 11}{x^3 + 3x^2 - x - 3}.$$

- Factoriser $x^3 + 3x^2 - x - 3$ par regroupement.
- Écrire la forme de la DES.
- Calculer chaque coefficient en choisissant des valeurs de x adaptées.
- Recomposer la fraction afin de vérifier le résultat.

Exercice 5 – Décomposition à trois termes ★★Décomposer dans $\mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{x - 1}{(x + 3)(x^2 + 3x + 2)}.$$

On factorisera d'abord complètement le facteur $x^2 + 3x + 2$.**TD 3 – Pôles multiples****Exercice 6 – Un pôle double isolé ★**Décomposer dans $\mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{-x - 3}{(x + 1)^2}.$$

Expliquer pourquoi la DES contient deux termes associés au même pôle.

Exercice 7 – Pôle double et pôle simple ★★

Décomposer

$$F(x) = \frac{2x^2 + 7x + 4}{(x + 3)(x + 2)^2}.$$

- Écrire la forme générale de la décomposition.
- Déterminer en priorité le coefficient du terme en $1/(x + 2)^2$.
- Déterminer ensuite les deux autres coefficients.
- Vérifier par recomposition.

Exercice 8 – Pôle double en zéro ★★Décomposer dans $\mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{-4x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2}.$$

On commencera par factoriser le dénominateur sous la forme $x^2(x - 1)$ et par identifier le coefficient du terme en $1/x^2$.

TD 4 – Facteurs quadratiques irréductibles

Exercice 9 – Un pôle réel et une paire complexe ★★

Décomposer dans $\mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{3x^2 - 3x + 2}{(x - 1)(x^2 + 1)}.$$

- Justifier que $x^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}$.
- Écrire la forme générale de la DES.
- Déterminer le coefficient associé au pôle réel par multiplication/simplification.
- Déterminer les deux coefficients restants.

Exercice 10 – Trois entraînements avec quadratiques ★★

Décomposer dans $\mathbb{R}$:

$$F_1(x) = \frac{-x^2 + 4x - 1}{(x + 1)(x^2 + 2)},$$

$$F_2(x) = \frac{-x - 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)},$$

$$F_3(x) = \frac{2x^2 + 5x + 8}{(x + 2)(x^2 + 2x + 2)}.$$

Dans chaque cas, vérifier le discriminant du facteur quadratique avant d'écrire la forme de la DES.

Exercice 11 – Quadratique après factorisation du dénominateur ★★

Décomposer

$$F(x) = \frac{2x^2 + 5x + 5}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}.$$

- Vérifier que $x = -1$ est une racine du dénominateur.
- Factoriser complètement le dénominateur dans $\mathbb{R}$.
- Effectuer la DES.

TD 5 – Partie entière et fractions impropres

Point de vigilance

Dans cette section, ne jamais commencer la DES avant d'avoir comparé les degrés. Une fraction impropre doit d'abord être écrite sous la forme

$$F(x) = E(x) + \frac{R(x)}{D(x)}, \quad \deg R < \deg D.$$

Exercice 12 – Partie entière affine ★★

Décomposer complètement dans $\mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2x - 3}.$$

Présenter explicitement : division euclidienne, partie entière, partie polaire, factorisation, pôles, forme de la DES et coefficients.

Exercice 13 – Partie entière quadratique ★★

Décomposer complètement

$$F(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - 12x^2 - 9x - 18}{x^2 - 4x - 5}.$$

Vérifier le résultat final par recomposition.

Exercice 14 – Même degré au numérateur et au dénominateur ★★

Décomposer dans $\mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{4x^3 + 10x^2 - 6x - 16}{x^3 + 3x^2 - x - 3}.$$

Avant la division, déterminer sans calcul le degré de la partie entière.

Exercice 15 – Fraction impropre de degré élevé ★★★

Décomposer complètement dans $\mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{3x^5 - 3x + 4}{x^4 - 1}.$$

- a) Effectuer la division euclidienne.
- b) Factoriser $x^4 - 1$ dans $\mathbb{R}$.
- c) Identifier les facteurs linéaires et le facteur quadratique irréductible éventuel.
- d) Écrire puis calculer la DES de la partie polaire.
- e) Vérifier le résultat.

TD 6 – Série d'entraînement issue du support Fractions Rationnelles

Cette section rassemble, sous une forme compacte, l'ensemble des fractions de la série historique afin de permettre un entraînement autonome ou une sélection par l'enseignant.

Exercice 16 – Série A : fractions propres ★–★★

Décomposer en éléments simples, dans $\mathbb{R}$, les fractions suivantes :

$$F_1(x) = \frac{-x-3}{x^2+3x+2},$$

$$F_2(x) = \frac{-5x+11}{x^2-4x+3},$$

$$F_3(x) = \frac{x-4}{x^2+x-2},$$

$$F_4(x) = \frac{-x-3}{(x+1)^2},$$

$$F_5(x) = \frac{2x^2+7x+4}{(x+3)(x+2)^2},$$

$$F_6(x) = \frac{3x^2-3x+2}{(x-1)(x^2+1)},$$

$$F_7(x) = \frac{-x^2+4x-1}{(x+1)(x^2+2)},$$

$$F_8(x) = \frac{-x-2}{(x-1)(x^2+x+1)},$$

$$F_9(x) = \frac{2x^2+5x+8}{(x+2)(x^2+2x+2)},$$

$$F_{10}(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+2},$$

$$F_{11}(x) = \frac{x-1}{(x+3)(x^2+3x+2)}.$$

Exercice 17 – Série B : décompositions complètes ★★–★★★★

Décomposer en éléments simples, dans $\mathbb{R}$, les fractions suivantes :

$$F_1(x) = \frac{x^3+3x^2-2x+2}{x^2+2x-3},$$

$$F_2(x) = \frac{x^4-2x^3-12x^2-9x-18}{x^2-4x-5},$$

$$F_3(x) = \frac{-4x^2+3x-2}{x^3-x^2},$$

$$F_4(x) = \frac{x^2-6x-11}{x^3+3x^2-x-3},$$

$$F_5(x) = \frac{4x^3+10x^2-6x-16}{x^3+3x^2-x-3},$$

$$F_6(x) = \frac{2x^2+5x+5}{x^3+4x^2+5x+2},$$

$$F_7(x) = \frac{3x^5-3x+4}{x^4-1}.$$

TD 7 – Applications de la DES

Exercice 18 – Calcul de primitives ★★

À l'aide d'une décomposition en éléments simples, calculer les primitives suivantes :

$$I_1 = \int \frac{5x + 7}{(x + 1)(x + 3)} dx,$$

$$I_2 = \int \frac{2x + 3}{(x - 1)(x + 2)} dx,$$

$$I_3 = \int \frac{x + 1}{(x + 1)^2(x + 2)} dx.$$

Pour chaque intégrale, vérifier le résultat par dérivation.

Exercice 19 – Transformée inverse de Laplace ★★

On rappelle que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p + a} \right\} = e^{-at}, \quad t \geq 0.$$

Décomposer puis déterminer $y(t)$ dans les cas suivants :

$$Y_1(p) = \frac{4p + 10}{(p + 1)(p + 2)},$$

$$Y_2(p) = \frac{5}{p(p + 5)},$$

$$Y_3(p) = \frac{2p + 7}{(p + 2)(p + 3)}.$$

Exercice 20 – Réponse temporelle d'un système ★★★

On considère

$$H(p) = \frac{6}{p(p + 2)(p + 3)}.$$

- Décomposer $H(p)$ en éléments simples.
- Calculer $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\}$.
- Associer chaque terme temporel au pôle qui lui correspond.
- Étudier qualitativement le comportement de $h(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

TD 8 – Exercices de synthèse

Exercice 21 – Choisir la stratégie la plus courte ★★★

Pour chacune des fractions ci-dessous, ne pas commencer immédiatement les calculs. Indiquer d'abord :

- s'il faut effectuer une division euclidienne ;
- la factorisation utile du dénominateur ;

- la forme générale de la DES ;
- les coefficients qui peuvent être obtenus directement par multiplication/simplification.

Effectuer ensuite la décomposition complète :

$$F_1(x) = \frac{4x^3 + 10x^2 - 6x - 16}{x^3 + 3x^2 - x - 3}, \quad F_2(x) = \frac{x - 1}{(x + 3)(x^2 + 3x + 2)}.$$

Exercice 22 – Problème complet ★★★

On considère

$$F(x) = \frac{2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{(x - 1)^2(x + 2)(x^2 + 1)}.$$

- Comparer les degrés et déterminer la partie entière éventuelle.
- Donner la liste des pôles, leur nature et leur multiplicité.
- Écrire la forme générale de la DES dans $\mathbb{R}$.
- Indiquer quels coefficients peuvent être obtenus immédiatement par multiplication/-simplification.
- Déterminer tous les coefficients.
- Vérifier le résultat par recomposition.

Exercice 23 – Défi de synthèse ★★★

On considère

$$G(x) = \frac{x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 3x + 2}{(x - 1)^2(x + 1)(x^2 + 1)}.$$

Réaliser une étude complète en suivant toutes les étapes du chapitre : degré, partie entière éventuelle, factorisation, pôles, forme de la DES, calcul des coefficients et vérification.

Analyser → Factoriser → Écrire la forme → Calculer → Vérifier

Série 2 – Transformée de Laplace

Objectifs pédagogiques

Cette série complète le TD de fractions rationnelles. Elle vise à calculer des transformées directes et inverses, exploiter les propriétés de décalage, puis résoudre des équations différentielles avec conditions initiales par la transformée de Laplace.

TD TL 1 – Transformées directes

Exercice TL1 – Transformées usuelles ★

Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

a) $f(t) = e^{-3t}$;

d) $f(t) = e^{4t} \cos(3t)$;

b) $f(t) = \sin(2t)$;

e) $f(t) = u(t - 2)$.

c) $f(t) = t^2$;

Exercice TL2 – Linéarité ★

Vérifier et exploiter la propriété de linéarité pour

$$f(t) = 3t^2 + 5e^{-t} - \cos(2t).$$

Exercice TL3 – Décalages ★★

Utiliser les propriétés de décalage pour calculer :

a) $(t - 2)u(t - 2)$, b) $e^{-5t} \sin t$.

Pour chaque cas, préciser la propriété utilisée.

TD TL 2 – Transformées inverses

Exercice TL4 – Reconnaissance de formes ★

Déterminer la transformée inverse de :

a) $\frac{1}{p^2 + 4}$, b) $\frac{p}{p^2 + 9}$, c) $\frac{2}{(p + 3)^2}$,

d) $\frac{1}{p(p + 2)}$, e) $\frac{p + 1}{p^2 + 4p + 13}$.

Pour les questions d) et e), effectuer les transformations algébriques nécessaires avant d'utiliser la table.

Exercice TL5 – Retard temporel ★★

Déterminer les transformées inverses de

$$F_1(p) = \frac{e^{-2p}}{p^2 + 1}, \quad F_2(p) = e^{-4p} \frac{p + 3}{p^2 + 4p + 5}.$$

Faire apparaître explicitement l'échelon retardé dans la réponse temporelle.

TD TL 3 – Équations différentielles**Conseil**

Pour chaque exercice : transformer l'équation, introduire les conditions initiales, isoler $Y(p)$, factoriser le dénominateur, effectuer la DES si nécessaire, puis revenir au temps. Vérifier enfin les conditions initiales.

Exercice TL6 – Équation homogène du second ordre ★★

Résoudre par transformée de Laplace :

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Exercice TL7 – Excitation sinusoïdale ★★

Résoudre :

$$y'' + 4y = \sin(2t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Commenter la particularité de la pulsation de l'excitation par rapport à celle du système homogène.

Exercice TL8 – Second ordre amorti ★★

Résoudre :

$$y'' + 2y' + y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Identifier la multiplicité du pôle apparaissant dans $Y(p)$.

TD TL 4 – Signaux retardés et impulsionnels**Exercice TL9 – Échelon retardé ★★★**

Résoudre :

$$y'' + y = u(t - 1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Écrire la solution sous une forme faisant clairement apparaître le retard d'une seconde.

Exercice TL10 – Impulsion de Dirac ★★★

Résoudre :

$$y'' - 2y' + y = \delta(t - 2), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Interpréter le rôle du facteur e^{-2p} dans le domaine de Laplace.

TD TL 5 – Applications GEII complémentaires

Exercice TL11 – Circuit RC ★★

Un circuit RC passe-bas vérifie

$$RC u'_C(t) + u_C(t) = E u(t), \quad u_C(0^-) = 0.$$

- Déterminer $U_C(p)$.
- Effectuer la DES.
- En déduire $u_C(t)$.
- Retrouver la constante de temps et vérifier les valeurs initiale et finale.

Exercice TL12 – Circuit RL ★★

Une bobine L en série avec une résistance R est alimentée par $Eu(t)$. Le courant vérifie

$$Li'(t) + Ri(t) = Eu(t), \quad i(0^-) = 0.$$

Déterminer $I(p)$ puis $i(t)$ et interpréter la constante de temps.

Exercice TL13 – Système du second ordre ★★★

On considère

$$H(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2}.$$

Pour une entrée échelon unité, établir $Y(p) = H(p)/p$. Étudier la forme de la réponse pour $0 < \zeta < 1$ en complétant le carré, puis relier les pôles à l'amortissement et à la pulsation des oscillations.

Méthode de travail

Pour les exercices de Laplace :

Modèle temporel $\rightarrow \mathcal{L} \rightarrow Y(p) \rightarrow$ factorisation/DES $\rightarrow \mathcal{L}^{-1} \rightarrow y(t) \rightarrow$ vérification