

Travaux dirigés – Nombres complexes

BUT GEII – Semestre 1

TD 1 – Calcul dans $\mathbb{C}$

Objectifs

Manipuler la forme algébrique des nombres complexes.

Exercice 1 ★

Calculer :

$$\begin{array}{ccccccc} i^3 & i^4 & i^7 & i^{23} & i^{24} & i^{120} & i^{2026} \\ (1+i)^2 & (1+i)^3 & (1+i)^{120} & (1+i)^{2026} & & & \\ (1-i)^2 & (1-i)^3 & (1-i)^{120} & (1-i)^{2026} & & & \end{array}$$

Exercice 2 ★

Écrire sous la forme algébrique :

$$(1-i)(1+2i), \quad \frac{1+2i}{1-2i}, \quad \frac{i-1}{4-3i}, \quad \frac{4+3i}{i-1}.$$

Exercice 3 ★ ★

Déterminer les nombres réels x et y solutions de :

- (a) $(2+i)x + y = 2 - 3i$;
- (b) $(2+i)x + (5-3i)y = 3 - i$.

Exercice 4 ★ ★ ★

On donne $z = (10 - x + i(2 + x))(x - i)$, x réel. Pour quelles valeurs de x , z est-il réel ?

TD 2 – Calcul dans $\mathbb{C}$ **Objectifs**

Utiliser les propriétés des nombres complexes.

Exercice 1 ★Déterminer les nombres complexes z tels que $(2 - \bar{z})(z - i)$ est un nombre réel.**Exercice 2** ★ ★Déterminer le nombre complexe z tel que

$$(1 - i)\bar{z} - \overline{(1 + i)} = \overline{(z + i)}.$$

Exercice 3 ★

Déterminer le conjugué du nombre complexe

$$\frac{(2 - 3i)(5 + i)}{2i(7 + i)}.$$

Exercice 4 ★ ★On donne $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et

$$Z = \frac{2z + 1}{z + i}, \quad z \neq -i.$$

(a) Exprimer en fonction de x et y la partie réelle $\operatorname{Re}(Z)$ et la partie imaginaire $\operatorname{Im}(Z)$.(b) Exprimer $\bar{Z}$ en fonction de x et y .**Exercice 5** ★ ★ ★Pour $z \in \mathbb{C}$, simplifier

$$\overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} - \frac{\overline{(1 + z)}}{\bar{z}}$$

en précisant les propriétés utilisées.

TD 3 – Modules des nombres complexes**Objectifs**

Déterminer et manipuler les modules des nombres complexes.

Exercice 1 ★ ★★

Calculer les modules des nombres complexes suivants :

$$\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 1 + 3\sqrt{3}i \quad 5 + 3i \quad (7 - 35i)(3 + 2i)$$
$$\frac{2}{1-i} - \frac{1}{3i} \quad (1+i)^6 \quad \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^2$$

Exercice 2 ★ ★ $z = \sqrt{3} + i$ et $z' = 3i - z$. Calculer les modules de :

$$\frac{z}{z'}, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}, \quad \frac{z}{iz'}, \quad -2\frac{z}{z'}.$$

Exercice 3 ★ ★ ★Déterminer z tel que

$$|z| = |z^2| = |1 - z|.$$

TD 4 – Écriture trigonométrique et exponentielle

Objectifs

Passer de l'écriture algébrique aux écritures trigonométrique et exponentielle.

Exercice 1 ★

Écrire sous les formes trigonométrique et exponentielle les nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{ccc} 1 & -1 & i \\ 2 + 2i & 4 - 4\sqrt{3}i & -(\sqrt{3} - i) \end{array}$$

Exercice 2 ★ ★

Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$\frac{1}{1+i}, \quad \frac{-3}{1-i}, \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}, \quad \frac{-\sqrt{3}+1}{2+2i\sqrt{3}}.$$

Exercice 3 ★ ★

On donne

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}}.$$

- Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2 .
- En déduire la forme algébrique de

$$z_1 z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad z_1^3, \quad z_2^6.$$

Exercice 4 ★ ★

En utilisant la notation d'Euler (écriture exponentielle), retrouver les formules d'addition $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

Exercice 5 ★ ★ ★

Pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, déterminer le module et l'argument des nombres suivants :

- $\cos(\theta) + i \sin(\theta)$;
- $\cos(\theta) - i \sin(\theta)$;
- $\sin(\theta) + i \cos(\theta)$;
- $1 + i \tan(\theta)$;
- $\frac{\cos(\theta) + i \sin(\theta)}{\cos(\theta) - i \sin(\theta)}$.