

Trigonométrie

Support de cours – Outils mathématiques et Logiciel

BUT GEII – Semestre 1

Trigonometrie

H. Hadj-Abdelkader, S. Ahmed-Ali, P. Hoppenot & M. Houkari

Ce chapitre rassemble les bases nécessaires pour manipuler les angles, le cercle trigonométrique, les fonctions sinus, cosinus et tangente, les identités usuelles, les équations trigonométriques et les signaux sinusoïdaux rencontrés en GEII.

Table des matières

1	Angles et mesure en radians	2
1.1	Degrés et radians	2
1.2	Mesure principale	2
2	Cercle trigonométrique	2
3	Valeurs remarquables	3
4	Parité, périodicité et angles associés	3
5	Fonctions sinus et cosinus	4
6	Fonction tangente	4
7	Formules d'addition et de soustraction	4
8	Angles doubles et demi-angle	5
9	Transformer sommes et produits	5
9.1	Sommes en produits	5
9.2	Produits en sommes	5
10	Équations trigonométriques	6
11	Inéquations trigonométriques	6
12	Signaux sinusoïdaux et périodicité	7
12.1	Mettre $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ sous forme d'une seule sinusoïde	7
13	Complément : fonction arctangente	7
14	Complément : substitution $t = \tan(x/2)$	8
15	Fiche de synthèse	8

1 Angles et mesure en radians

1.1 Degrés et radians

Définition

Un tour complet correspond à $360^\circ = 2\pi$ radians. Ainsi

$$180^\circ = \pi \text{ rad}, \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

Pour convertir :

$$\theta_{\text{rad}} = \theta_{\text{deg}} \frac{\pi}{180}, \quad \theta_{\text{deg}} = \theta_{\text{rad}} \frac{180}{\pi}.$$

Un angle orienté est compté positivement dans le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre). Deux mesures d'un même angle diffèrent d'un multiple de 2π :

$$\theta' = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1.2 Mesure principale

Définition

On appelle **mesure principale** d'un angle l'unique mesure appartenant à l'intervalle $] -\pi, \pi]$.

Méthode

Pour réduire un angle θ modulo 2π , on ajoute ou retranche $2k\pi$ jusqu'à obtenir une valeur dans $] -\pi, \pi]$ (ou dans $[0, 2\pi[$ lorsque cet intervalle est demandé).

Exemple

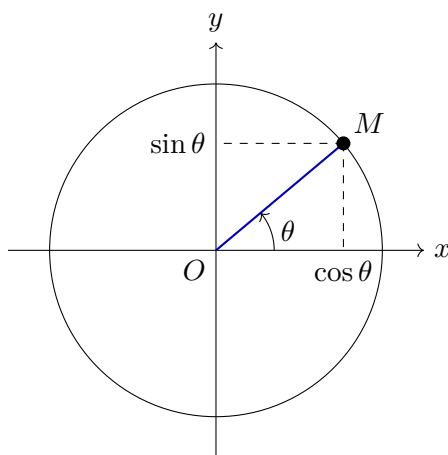
$$\frac{47\pi}{3} = 16\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \text{mesure principale} = -\frac{\pi}{3}.$$

2 Cercle trigonométrique

Définition

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O , de rayon 1, orienté dans le sens direct. Si le point M correspond à l'angle θ , alors

$$M(\cos \theta, \sin \theta).$$



Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \quad -1 \leq \sin x \leq 1,$$

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}.$$

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π -périodiques :

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

3 Valeurs remarquables

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

Retrouver les valeurs plutôt que les apprendre toutes

On mémorise les angles $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ dans le premier quadrant. Les autres valeurs se déduisent par symétrie, périodicité et parité.

4 Parité, périodicité et angles associés

Propriété

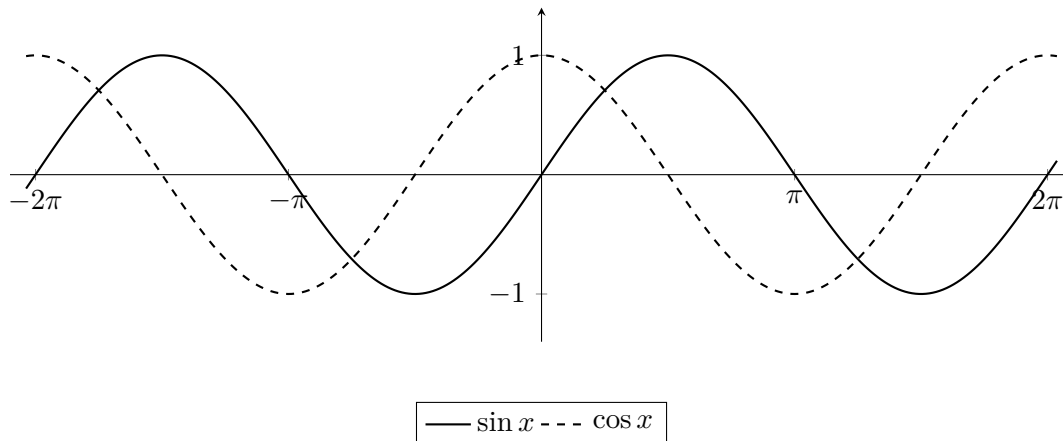
$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x, \quad \tan(-x) = -\tan x.$$

Donc cosinus est paire, sinus et tangente sont impaires.

Les relations suivantes sont particulièrement utiles :

$$\begin{aligned}\cos(\pi + x) &= -\cos x, & \sin(\pi + x) &= -\sin x, \\ \cos(\pi - x) &= -\cos x, & \sin(\pi - x) &= \sin x, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x, & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x.\end{aligned}$$

5 Fonctions sinus et cosinus



On remarque que

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

ce qui correspond à un décalage horizontal de $\pi/2$ entre les deux courbes.

6 Fonction tangente

Définition

Pour tout x tel que $\cos x \neq 0$,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

La tangente n'est donc pas définie pour

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Propriété

La fonction tangente est π -périodique et impaire :

$$\tan(x + \pi) = \tan x, \quad \tan(-x) = -\tan x.$$

De l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on déduit, lorsque $\cos x \neq 0$,

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

7 Formules d'addition et de soustraction

Pour tous réels x et y :

Propriété

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

En remplaçant y par $-y$:

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

Pour la tangente, lorsque les expressions sont définies :

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$$

8 Angles doubles et demi-angle

En prenant $y = x$:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Donc

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Et, si le dénominateur est non nul,

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

9 Transformer sommes et produits

Ces identités sont utiles en traitement du signal et en calcul intégral.

9.1 Sommes en produits

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2},$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}.$$

9.2 Produits en sommes

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)],$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)],$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)].$$

10 Équations trigonométriques

Propriété

Pour $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\cos a = \cos b \iff a = b + 2k\pi \quad \text{ou} \quad a = -b + 2k\pi,$$

$$\sin a = \sin b \iff a = b + 2k\pi \quad \text{ou} \quad a = \pi - b + 2k\pi,$$

$$\tan a = \tan b \iff a = b + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple

Résoudre $\cos(3x) = \frac{1}{2}$:

$$3x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

d'où

$$x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Méthode

Pour une équation sur un intervalle :

1. résoudre d'abord dans $\mathbb{R}$;
2. écrire les familles de solutions avec $k \in \mathbb{Z}$;
3. ne conserver que les valeurs appartenant à l'intervalle demandé.

11 Inéquations trigonométriques

La méthode la plus sûre consiste à utiliser le cercle trigonométrique.

Exemple

Sur $[0, 2\pi]$, résoudre $\sin x \geq \frac{1}{2}$. Les égalités ont lieu pour $x = \pi/6$ et $x = 5\pi/6$. L'ordonnée sur le cercle est supérieure ou égale à $1/2$ entre ces deux angles :

$$x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right].$$

12 Signaux sinusoïdaux et périodicité

Application GEII

Un signal sinusoïdal s'écrit souvent

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{ou} \quad s(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

où :

- A est l'amplitude ;
- ω est la pulsation en rad/s ;
- φ est la phase à l'origine en rad ;
- T est la période et f la fréquence.

Les relations fondamentales sont

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{|\omega|}}, \quad \boxed{f = \frac{1}{T}}, \quad \boxed{\omega = 2\pi f}.$$

Le déphasage temporel associé à φ peut se lire sous la forme

$$\omega t + \varphi = \omega \left(t + \frac{\varphi}{\omega} \right).$$

Ainsi, le décalage horizontal vaut $-\varphi/\omega$.

12.1 Mettre $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ sous forme d'une seule sinusoïde

On cherche

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \cos(\omega t - \phi).$$

En développant :

$$A \cos(\omega t - \phi) = A \cos \phi \cos \omega t + A \sin \phi \sin \omega t.$$

Donc

$$a = A \cos \phi, \quad b = A \sin \phi,$$

et par conséquent

$$\boxed{A = \sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \boxed{\tan \phi = \frac{b}{a}}$$

avec choix du quadrant adapté.

Exemple

$$\cos(2t) + \sin(2t) = \sqrt{2} \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right).$$

13 Complément : fonction arctangente

La fonction tangente est strictement croissante de $] -\pi/2, \pi/2[$ vers $\mathbb{R}$. Elle y admet une fonction réciproque appelée arctan :

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow] -\pi/2, \pi/2[.$$

Par définition,

$$y = \arctan x \iff \tan y = x \quad \text{et} \quad y \in] -\pi/2, \pi/2[.$$

Attention : $\arctan(\tan x)$ n'est égal à x que si $x \in] -\pi/2, \pi/2[$.

14 Complément : substitution $t = \tan(x/2)$

Pour $t = \tan(x/2)$, lorsque les expressions sont définies :

$$\boxed{\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}}, \quad \boxed{\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}}, \quad \boxed{\tan x = \frac{2t}{1 - t^2}}.$$

Ce changement de variable transforme certaines expressions trigonométriques en expressions rationnelles.

15 Fiche de synthèse

À savoir faire

À l'issue du chapitre, on doit savoir :

- convertir degrés/radians et réduire un angle modulo 2π ;
- déterminer une mesure principale ;
- placer un angle sur le cercle et obtenir sinus/cosinus/tangente ;
- utiliser les valeurs remarquables et les symétries ;
- manipuler les formules d'addition, duplication et linéarisation ;
- résoudre des équations et inéquations trigonométriques ;
- identifier amplitude, pulsation, fréquence, période et phase d'une sinusoïde ;
- regrouper $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ en une sinusoïde unique.