

OML1 – Semaine 1

Les notions indispensables pour le GEII

Rappels de mathématiques, méthodes et exercices d'application

Hicham HADJ-ABDELKADER – Philippe HOPPENOT – Sofiane AHMED-ALI

BUT1 GEII – Semestre 1

Objectif de la première semaine. Cette séance ne constitue pas un chapitre de mathématiques. Elle sert à remettre en place les automatismes nécessaires pour les modules OML : ensembles de nombres, calcul littéral, fractions, puissances et racines, identités remarquables, résolution d'équations et d'inéquations, fonctions linéaires et affines, proportionnalité, second degré, dérivation et manipulation de formules utilisées en GEII.

Méthode de travail

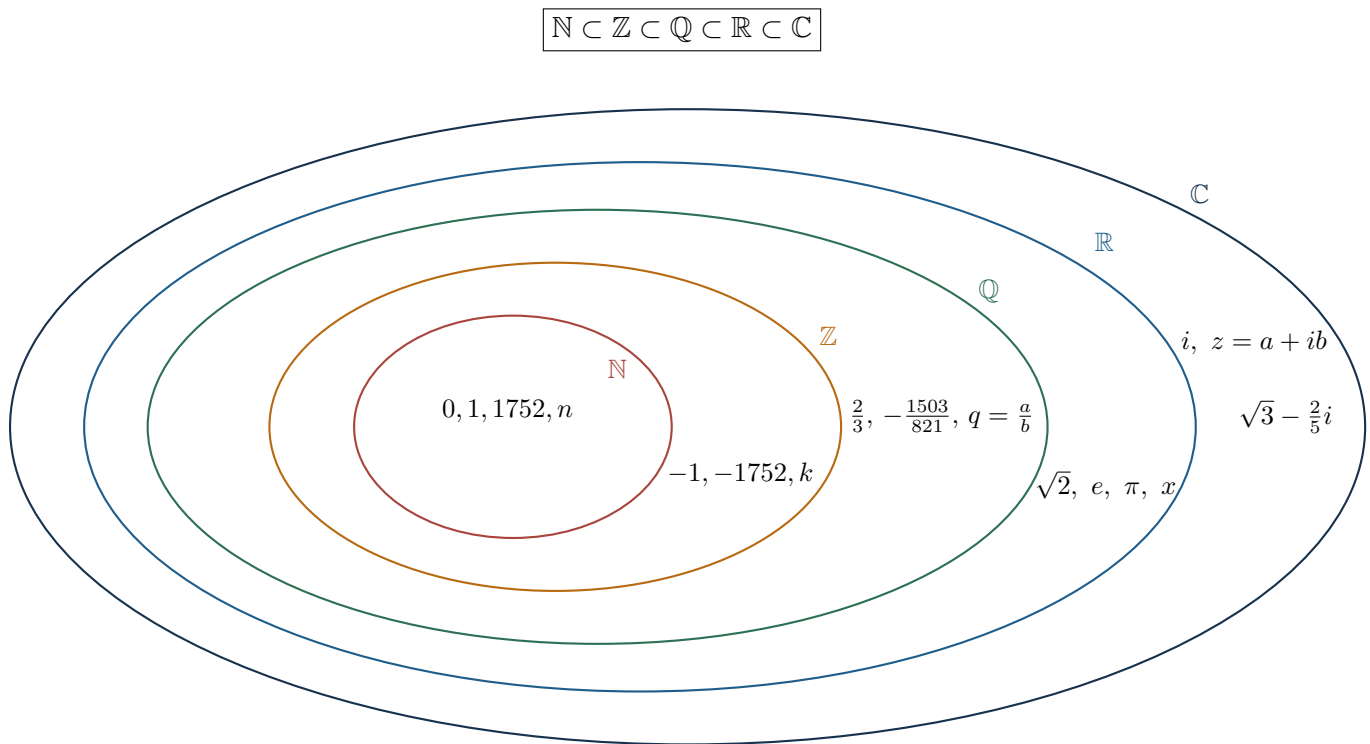
L'objectif n'est pas seulement d'obtenir un résultat numérique. Il faut savoir **identifier la structure** d'une expression, choisir la règle adaptée, préciser les conditions de validité (dénominateurs non nuls, racines réelles, etc.) et vérifier la cohérence du résultat.

Plan de la semaine

- | | |
|--|--|
| 1. Ensembles de nombres et parité | 8. Puissances, racines et exponentielles |
| 2. Calculs de base à connaître par coeur | 9. Équations et formules |
| 3. Polynôme du second degré | 10. Fonctions affines |
| 4. Factorielle | 11. Dérivation |
| 5. Proportionnalité et droites | 12. Applications au GEII |
| 6. Implication et équivalence | 13. Mini-synthèse GEII |
| 7. Calcul littéral et fractions | 14. Travail complémentaire |

1. Ensembles de nombres et parité

Les ensembles à connaître



Définitions

- **Entiers naturels** : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.
- **Entiers relatifs** : $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, k, \dots\}$.
- **Rationnels** : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} ; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$.
- **Réels** : $\mathbb{R}$ contient les rationnels et les irrationnels tels que $\sqrt{2}, e, \pi$, etc.
- **Complexes** : $\mathbb{C} = \{a + ib ; a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

Entiers pairs et impairs

$$\begin{aligned}
 \{\text{naturels pairs}\} &= \{0, 2, 4, 6, \dots, 2n ; n \in \mathbb{N}, \dots\}, \\
 \{\text{naturels impairs}\} &= \{1, 3, 5, 7, \dots, 2n + 1 ; n \in \mathbb{N}, \dots\}, \\
 \{\text{relatifs pairs}\} &= \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots, 2k ; k \in \mathbb{Z}, \dots\}, \\
 \{\text{relatifs impairs}\} &= \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \dots, 2k + 1 ; k \in \mathbb{Z}, \dots\}.
 \end{aligned}$$

2. Calculs de base à connaître par coeur

2.1 Puissances

Pour $a \neq 0$, $b \neq 0$ et des entiers m, n :

$a \times a \times \cdots \times a = a^n$ n facteurs	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$a^0 = 1$
$a^m a^n = a^{m+n}$	$(a^m)^n = a^{mn}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$(ab)^n = a^n b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	

2.2 Fractions

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, b \neq 0$	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, b, d \neq 0$
$\frac{1}{a/b} = \frac{b}{a}, a, b \neq 0$	$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$	$\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}, b, c \neq 0$

Erreur classique

On ne simplifie jamais des termes séparés par une addition. Par exemple

$$\frac{x+2}{x} \neq 2.$$

Une simplification porte uniquement sur des **facteurs communs**.

2.3 Équation et inéquation du premier degré

Pour $a \neq 0$:

$$ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}.$$

De même,

$$ax + b \leq 0 \iff \begin{cases} x \leq -\frac{b}{a}, & \text{si } a > 0, \\ x \geq -\frac{b}{a}, & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Le sens de l'inégalité s'inverse lorsque l'on multiplie ou on divise par un nombre négatif.

2.4 Racines et puissances fractionnaires

Soit $x \geq 0$:

$$\sqrt{x} = x^{1/2}, \quad (\sqrt{x})^2 = x, \quad \sqrt{x^2} = |x|.$$

Ainsi, pour $a \geq 0$, $\sqrt{a^2} = a$; pour $a \leq 0$, $\sqrt{a^2} = -a$.

Pour $a > 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}.$$

Pour $x, y \geq 0$:

$$\begin{aligned}(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 &= x + 2\sqrt{xy} + y, \\(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 &= x - 2\sqrt{xy} + y, \\(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) &= x - y, \\\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} \quad (x \neq y), \\\sqrt{xy} &= \sqrt{x}\sqrt{y}, \\\sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0, b > 0).\end{aligned}$$

Soit $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$: la racine n -ième de x est

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n},$$

le nombre réel positif y tel que $y^n = x$.

Piège fréquent

$$\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

2.5 Identités remarquables

$$\begin{aligned}a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2, \\a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2, \\a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \\a^2 + b^2 &= (a - ib)(a + ib) \quad \text{dans } \mathbb{C}, \\a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 &= (a + b)^3, \\a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 &= (a - b)^3.\end{aligned}$$

Développer / factoriser

Lire une identité dans le sens gauche $\rightarrow$ droite permet souvent de **factoriser**. La lire dans l'autre sens permet de **développer**.

3. Polynôme du second degré

On considère

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

et le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Cas $\Delta > 0$

Deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Alors

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Le polynôme est du signe de $-a$ entre les racines et du signe de a à l'extérieur.

Cas $\Delta = 0$

Une racine réelle double :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad P(x) = a(x - x_0)^2.$$

Le polynôme est du signe de a (et s'annule en x_0).

Cas $\Delta < 0$

Deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Dans $\mathbb{C}$:

$$P(x) = a(x - z_1)(x - z_2).$$

Sur $\mathbb{R}$, P est du signe de a .

Somme et produit des racines

Pour

$$P(x) = x^2 - sx + p,$$

si x_1 et x_2 sont ses racines :

$$\boxed{s = x_1 + x_2, \quad p = x_1 x_2.}$$

4. Factorielle

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n.$$

Par convention : $0! = 1$.

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120.$$

Et plus généralement :

$$\boxed{n! = n(n-1)!}$$

5. Proportionnalité, fonction linéaire et fonction affine**5.1 Proportionnalité**

Deux grandeurs non nulles X et Y sont proportionnelles s'il existe un réel $k \neq 0$ tel que

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad y_i = kx_i.$$

Donc

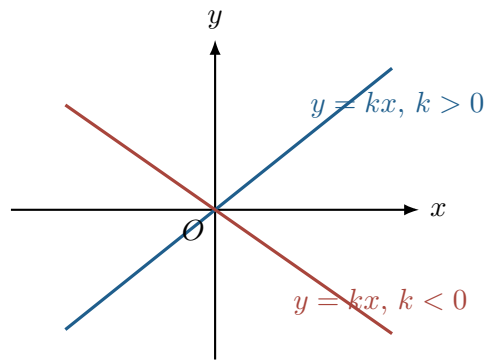
$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n}{x_n} = k.$$

On retrouve aussi le produit en croix :

$$x_1 y_2 = x_2 y_1.$$

Si x est inconnu et y connu :

$$x_1 y = x y_1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{x_1 y}{y_1}.$$



La fonction $f(x) = kx$ est appelée **fonction linéaire**. Sa représentation graphique est une droite passant par l'origine, de pente k .

5.2 Équation réduite d'une droite

Une droite (AB) a pour équation

$$y = mx + p$$

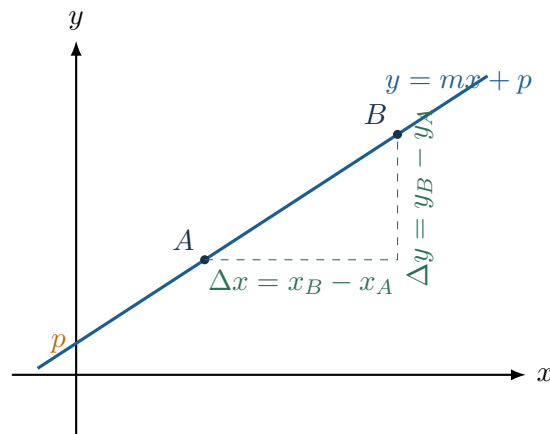
où m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.

Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ avec $A \neq B$:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Si le point $Q(0, p)$ est connu, alors $p = y_Q$. Sinon, à partir de $A \in (AB)$:

$$y_A = mx_A + p \implies p = y_A - mx_A.$$



Remarque

Δy et Δx sont proportionnels puisque $\Delta y = m \Delta x$. La fonction $f(x) = mx + p$ est une **fonction affine**. Sa représentation est une droite passant par $(0, p)$ et de pente m .

6. Implication et équivalence

Implication

$$x = 3 \implies x^2 = 9.$$

La réciproque est fausse : $x^2 = 9$ ne permet pas de conclure uniquement $x = 3$, car $x = -3$ convient aussi.

Équivalence

$$x^2 = 9 \iff x = 3 \text{ ou } x = -3.$$

Une équivalence signifie que les deux implications sont vraies.

7. Rappels guidés : calcul littéral et fractions**Exercice 1 ★ – Fractions numériques**

Donner une écriture sous forme d'une fraction irréductible :

a) $A = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.$

b) $B = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}.$

c) $C = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}.$

d) $D = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}.$

e) $E = \frac{1}{\frac{2}{3}}.$

Exercice 2 ★★ – Fractions littérales et GEII

Simplifier en précisant les valeurs interdites :

a) $F = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$

b) $G = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}.$

c) $H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$

d) $I = \frac{\alpha^3}{\alpha^5 + \alpha^7}.$

8. Rappels guidés : puissances, racines et exponentielles**Exercice 3 ★ – Simplifications**

Simplifier :

a) $\sqrt{128} - 3\sqrt{8}.$

b) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}}.$

c) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{4}).$

d) $e^3 e^5 e^{-4}.$

e) $(e^2 + e^{-2})(e^2 - e^{-2}).$

Exercice 4 ★★ – Écriture scientifique

Compléter les exposants :

- a) $2^{20} + 2^{20} + 2^{20} + 2^{20} = 2^{\dots}$.
- b) $(10^5)^3 = 10^{\dots}$.
- c) $\frac{10^{-6}(10^2)^4}{10^{-3}10^5} = 10^{\dots}$.
- d) $\frac{2 \times 10^6 + 5 \times 10^7}{10^8} = 52 \times 10^{\dots}$.

9. Rappels guidés : équations et manipulation de formules**Exercice 5 ★ – Équations**

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- a) $2x - 7 = 3x + 8$.
- b) $3(x + 5) = -4x$.
- c) $\frac{x - 3}{4} = 2x$.
- d) $\frac{3}{x} = \frac{6}{5}$.
- e) $\frac{1}{x + 2} = 3$.
- f) $\frac{x + 2}{x - 4} = 7$.

Exercice 6 ★★★ – Isoler une grandeur

- a) À partir de $\frac{a - b}{\alpha c} = ab$, déterminer a en fonction de b, c, α .
- b) À partir de $\frac{1}{\alpha c} + \frac{a}{a + c} = ab$, déterminer α en fonction de a, b, c .
- c) On donne $U = RI$. Exprimer successivement R puis I .
- d) À partir de $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, exprimer R_{eq} .

10. Rappels guidés : fonctions affines**Exercice 7 ★ – Tracer des droites**

Tracer dans un repère adapté :

- a) $f(x) = -2x + 1$.
- b) $g(t) = -\frac{1}{2}t + 3$.
- c) $h(x) = \frac{\pi}{3}$.
- d) $k(t) = -\frac{t+1}{4}$.
- e) $\ell(x) = 3$.
- f) $U(I) = RI$ avec $R = 50 \Omega$.

Exercice 8 ★★ – Lecture physique d'une droite

Un dipôle résistif vérifie expérimentalement $U = aI + b$.

1. Que représente a ? Que signifierait $b \neq 0$?
2. Pour $a = 220 \Omega$ et $b = 0$, calculer U pour $I = 10 \text{ mA}$, 25 mA et 40 mA .
3. Représenter les trois points et vérifier leur alignement.

11. Rappels guidés : dérivation**Formules essentielles**

$$(u + v)' = u' + v', \quad (uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

$$[\sin u]' = u' \cos u, \quad [\cos u]' = -u' \sin u, \quad [e^u]' = u' e^u, \quad [\ln u]' = \frac{u'}{u}.$$

Exercice 9 ★ – Dérivées directes

Déterminer les dérivées :

- a) $f(x) = x^5 - 7x^3 + 32x^2 + 19$.
- b) $f(t) = \frac{3t^3 + 3t^2 + 3t}{5}$.
- c) $f(\theta) = \sin(-5\theta)$.
- d) $f(s) = e^{-s/3}$.
- e) $f(t) = \ln(3t + 5)$.

Exercice 10 ★★ – Produits, quotients et compositions

Déterminer les dérivées :

- a) $f(x) = \frac{5x + 1}{x - 2}$.
- b) $f(t) = \cos t \sin t$.
- c) $f(t) = \cos(3t) \sin(2t)$.
- d) $f(t) = t \cos(2t - 5)$.
- e) $f(t) = a \cos(3t) + b \sin(3t)$.

12. Exercices d'application au GEII

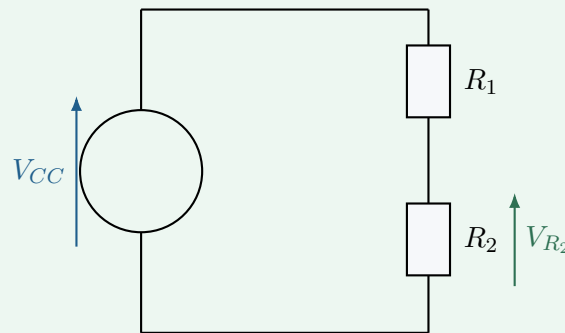
Deux résistances sont associées en parallèle. La résistance équivalente R_e vérifie

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Montrer que R_e est égale au quotient du produit des deux résistances par leur somme.

Soit V_{CC} la tension aux bornes du générateur et V_{R_2} la tension aux bornes de R_2 . On obtient

$$V_{R_2} = V_{CC} \frac{R_2}{R_2 + R_1}.$$



1. Exprimer V_{CC} en fonction de R_1 , R_2 et V_{R_2} .
2. On souhaite obtenir $V_{R_2} = 2\text{ V}$. Quelle valeur donner à R_2 , sachant que $R_1 = 1\text{ k}\Omega$ et $V_{CC} = 5\text{ V}$? Établir d'abord l'expression littérale puis effectuer l'application numérique.

Une interface convertit une température T en $^{\circ}\text{C}$ en une tension U en volts. La gamme d'entrée est 10°C à 40°C et la gamme de sortie est 0 V à 10 V . À 10°C , on obtient 0 V ; à 40°C , on obtient 10 V .

1. Pour $T = 25^{\circ}\text{C}$, quelle est la tension de sortie?
2. Si la tension de sortie vaut 3 V , quelle est la température d'entrée?
3. Exprimer U en fonction de T , puis représenter les variations de U en fonction de T .
4. En déduire T en fonction de U .

Soit r une résistance strictement positive telle que $r = 10\ \Omega$.

1. Déterminer la résistance positive x telle que

$$r + \frac{rx}{r+x} = x.$$

2. Déterminer la résistance positive x telle que

$$r + \frac{rx}{r+x} \geq x.$$

13. Mini-synthèse GEII complémentaire

Exercice 11 ★★ – Résistances en parallèle

On considère $R_1 = 100\ \Omega$ et $R_2 = 220\ \Omega$.

1. Calculer R_{eq} .
2. Vérifier que R_{eq} est inférieure à la plus petite des deux résistances.
3. Pour $U = 5\text{ V}$, calculer le courant total $I = U/R_{eq}$.
4. Comparer avec $I_1 + I_2$, où $I_k = U/R_k$.

Exercice 12 ★★★ – Signal simple

On considère

$$u(t) = 3 \cos(2t) + 2 \sin(2t).$$

1. Calculer $u(0)$.
2. Déterminer $u'(t)$.
3. Calculer $u'(0)$.
4. Identifier les règles de dérivation utilisées.

14. Travail complémentaire

Exercice 13 ★★ – Vrai ou faux ?

Dire si les affirmations sont vraies ou fausses et justifier :

- a) $\frac{\frac{1}{RC\omega}}{1 + \frac{1}{RC\omega}} = \frac{1}{1 + RC\omega}$.
- b) $\sqrt{12} + \sqrt{75} = \sqrt{147}$.
- c) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ pour tous $a, b \geq 0$.
- d) Si $U = RI$ et R est constante, U est une fonction affine de I .

Exercice 14 ★★★ – Détecter une erreur de calcul

On suppose $a > b$ et on pose $c = a - b$, donc $a = b + c$. On écrit ensuite :

$$\begin{aligned} a(a-b) &= (b+c)(a-b), \\ a^2 - ab &= ab + ac - b^2 - bc, \\ a^2 - ab - ac &= ab - b^2 - bc, \\ a(a-b-c) &= b(a-b-c). \end{aligned}$$

Un raisonnement conclut alors $a = b$. Où est l'erreur ?

Bilan. Les notions de cette semaine doivent devenir des réflexes. Elles seront réutilisées dans les calculs de signaux, les circuits électriques, les SAE et les TP.