

Travaux dirigés – Trigonométrie

BUT GEII – Semestre 1

TD 1 – Angles, cercle trigonométrique et valeurs remarquables

Objectifs

Réduire un angle, déterminer sa mesure principale, le placer sur le cercle et calculer sinus/cosinus.

Exercice 1 ★

Déterminer la mesure principale de :

$$\frac{17\pi}{2}, \quad -\frac{23\pi}{4}, \quad \frac{47\pi}{3}, \quad -\frac{367\pi}{5}, \quad \frac{45367\pi}{20}.$$

Exercice 2 ★

Après réduction modulo 2π , placer les angles suivants sur le cercle puis donner cos et sin :

$$\frac{49\pi}{6}, \quad \frac{7\pi}{6}, \quad -\frac{81\pi}{4}, \quad \frac{53\pi}{3}.$$

Exercice 3 ★★

Donner les valeurs exactes :

$$\cos \frac{25\pi}{2}, \quad \cos \frac{17\pi}{3}, \quad \cos \frac{258\pi}{6}, \quad \sin \frac{12345\pi}{4}, \quad \sin \frac{335\pi}{6}, \quad \sin \frac{211\pi}{4}.$$

Exercice 5 ★★

Exprimer uniquement en fonction de $\sin x$ et $\cos x$:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \cos(x + \pi), \quad \sin(5\pi - x).$$

TD 2 – Identités trigonométriques

Objectifs

Utiliser parité, périodicité, formules d'addition, duplication et transformations somme-produit.

Exercice 1 ★

Démontrer à partir des formules d'addition :

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

Exercice 2 ★

Démontrer :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

puis en déduire les formules de $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ en fonction de $\cos 2x$.

Exercice 3 ★★

Transformer en produits :

$$\cos p + \cos q, \quad \cos p - \cos q, \quad \sin p + \sin q, \quad \sin p - \sin q.$$

Exercice 4 ★★

Transformer en sommes :

$$\cos a \cos b, \quad \sin a \sin b, \quad \sin a \cos b.$$

Exercice 5 ★★

Simplifier

$$E = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi + x) + \cos(5\pi - x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Exercice 6 ★★★

Sachant que $\cos(\pi/5) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, déterminer $\sin(\pi/5)$ puis les valeurs exactes de sinus et cosinus de $6\pi/5$, $-\pi/5$ et $4\pi/5$.

TD 3 – Équations et inéquations trigonométriques

Objectifs

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis sur un intervalle, en utilisant le cercle trigonométrique.

Exercice 1 ★

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\cos x = \frac{1}{2}, \quad \sin x = -\frac{1}{2}, \quad \tan x = 1.$$

Puis donner les solutions dans $[0, 2\pi]$.

Exercice 2 ★★

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans l'intervalle indiqué :

$$\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

$$\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Exercice 3 ★★

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\cos x + \sin x = 1,$$

$$\sqrt{3} \cos(2x) - \sin(2x) = \sqrt{3},$$

$$\sin(2x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\cos(2x) = \sin x.$$

Exercice 4 ★★

Résoudre sur $[0, 2\pi]$ à l'aide du cercle :

$$\sin x \geq \frac{1}{2}, \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{1}{2}, \quad \cos x \leq \sin x.$$

Exercice 5 ★★★

Résoudre sur $[0, 2\pi]$:

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) > -\frac{1}{2}.$$

TD 4 – Tangente et arctangente

Objectifs

Maîtriser domaine, périodicité, identités de tangente et fonction réciproque.

Exercice 1 ★

Calculer exactement :

$$\tan 0, \quad \tan \frac{\pi}{6}, \quad \tan \frac{\pi}{4}, \quad \tan \frac{\pi}{3}, \quad \tan \frac{2\pi}{3}, \quad \tan \pi.$$

Exercice 2 ★★

Démontrer :

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

Préciser les conditions de validité.

Exercice 3 ★

Calculer :

$$\arctan(0), \arctan(1), \arctan(-1), \arctan(\sqrt{3}), \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Exercice 4 ★★

Calculer :

$$\arctan\left(\tan \frac{\pi}{5}\right), \quad \arctan\left(\tan \frac{5\pi}{6}\right), \quad \arctan\left(\tan \frac{4\pi}{7}\right), \quad \tan(\arctan 2).$$

Exercice 5 ★★★

Pour $x > 0$, démontrer

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

TD 5 – Sinusoïdes et applications GEII**Objectifs**

Identifier amplitude, période, fréquence, pulsation, phase et réécrire une somme sinusoïdale.

Exercice 1 ★

Pour chaque signal, déterminer amplitude, pulsation, période, fréquence et phase initiale :

$$s_1(t) = 3 \cos(100\pi t + \pi/3),$$

$$s_2(t) = 2 \sin(400t - \pi/4),$$

$$s_3(t) = -5 \cos(20\pi t).$$

Exercice 2 ★

Montrer que $t \mapsto \cos(\omega t)$ est périodique de période $T = 2\pi/|\omega|$ pour $\omega \neq 0$.

Exercice 3 ★★

Mettre sous la forme $A \cos(\omega t - \phi)$ avec $A > 0$:

$$\cos 2t + \sin 2t,$$

$$\sqrt{3} \cos t + \sin t,$$

$$-\sqrt{3} \sin t + \cos t,$$

$$3 \cos(50t) - 4 \sin(50t).$$

Exercice 4 ★★

Deux signaux sont

$$u(t) = 10 \cos(100\pi t), \quad i(t) = 2 \cos(100\pi t - \pi/6).$$

Déterminer leur fréquence et le déphasage de i par rapport à u , en radians, degrés et secondes.

Exercice 5 ★★★

On considère

$$s(t) = 2 \cos(100t) + 3 \sin(100t).$$

Écrire $s(t)$ sous la forme $A \cos(100t - \phi)$, puis déterminer les instants de maximum sur une période.

TD 6 – Approfondissements

Objectifs

Consolider les transformations et préparer les usages ultérieurs en complexes et traitement du signal.

Exercice 1 ★★

Avec $t = \tan(x/2)$, démontrer

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

Exercice 2 ★★

Calculer exactement $\sin(\pi/8)$, $\cos(\pi/8)$ et $\cos(\pi/12)$ à l'aide des formules du cours.

Exercice 3 ★★★

Montrer que

$$\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{3 + \cos 4x}{4}.$$

Exercice 4 ★★★

Simplifier

$$S = \cos x + \cos 3x + \cos 5x.$$

Exercice 5 ★★★

Montrer que, lorsque toutes les expressions sont définies,

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}.$$