Corrigé de l'examen de Logique, L2, 2013

S. Cerrito

June 24, 2013

1 Exercice 1

Voici des formules traduisant correctement les 5 énoncés.

1. $\forall x\ (L(x) \rightarrow A(a, x))$
2. $\forall x\ (V(x) \rightarrow (P(x) \wedge \forall z\ (M(x, z) \rightarrow L(z)))$
   Remarque : la sous-formule $\forall z\ (M(x, z) \rightarrow L(z)))$ dit que si x mange une chose quelconque z, alors ce z est forcement un légume, c'est à dire que x mange exclusivement des légumes. Donc la formule entière dit que manger exclusivement des légumes est une condition **nécessaire** pour être une personne vegétarienne : si on est une personne vegétarienne, alors on mange exclusivement des légumes.
3. $\forall x\ \forall y\ ((S(x) \wedge S(y) \wedge \forall z\ (EL(z, x) \leftrightarrow El(z, y))) \rightarrow Egal(x, y))$
4. $\forall x\ \forall y\ ((S(x) \wedge S(y)) \rightarrow (PG(n(x), n(y)) \wedge PG(n(y), n(x))))$
5. D'abord, écrivons une formule, que l'on notera ici $M(y)$ (pour abréger), qui dit que (l'ensemble) y a un élément maximum; ici, m, z et x sont des variables.
   $M(y) = \exists m\ \forall z\ (EL(z, y) \rightarrow PG(m, z)$.
   La formule entière cherchée est : $\forall y\ ((S(y) \wedge F(y)) \rightarrow M(y))$

2 Exercice 2

Formule A Cette formule est vraie pour $\mathcal{I}_1$: puisque ici a signifie 1, et p vaut vrai pour 1, l'implication $p(x) \rightarrow p(a)$ est vraie pour toute valeur de x. Un raisonnement analogue permet de conclure que la formule est vraie pour $\mathcal{I}_2$ aussi.
Ceci dit, *la formule A n'est pas valide* : par exemple, soit $\mathcal{I}_3$ une interprétation où l'univers est $\{1, 2\}$, $\mathcal{I}_3(a) = 1$ et $\mathcal{I}_3(p) = \{2\}$, c'est à dire que p vaut Vrai seulement pour 2. Alors, pour x qui vaut 2, l'implication $p(x) \rightarrow p(a)$ vaut Faux, donc $\forall x(p(x) \rightarrow p(a))$ est fausse pour cette interprétation.

Formule B Cette formule est vraie pour les 2 interprétatios. *De facto, B est valide* : étant donné n'importe quelle inteprétation $\mathcal{I}$, son univers D est non-vide par définition; or, si p vaut Vrai pour tout élément de D, en particulier vaut vrai pour l'élément nommé par la constante a.

Formule C Cette formule est fausse pour $\mathcal{I}_1$: ici, $p(a)$ est vrai mais $\forall x\ p(x)$ est fausse. En revanche, elle est vraie pour $\mathcal{I}_2$, puisque ici $\forall x\ p(x)$ est vraie. Puisque C est fausse pour $\mathcal{I}_1$, évidemment *elle n'est pas valide.*

Formule D Cette formule est vraie pour $\mathcal{I}_1$ et pour $\mathcal{I}_2$, puisque dans le deux cas $p(a)$ vaut Vrai. *Toutefois, D n'est pas valide.* Pour le voir, considérons à nouveau l'interprétation $\mathcal{I}_3$ de la réponse aux questions sur la formule A : $\exists x\ p(x)$ est vraie, puisque p vaut Vrai si la valeur de x est 2, toutefois $p(a)$ est fausse. Remarque : $A \equiv D$! Pour le voir, considérons la suite d'équivalences suivante :
$A\ = \forall x\ (p(x) \to p(a))\ \equiv\ \forall x\ (\neg p(x) \vee p(a))\ \equiv$
$(\forall x\ \neg p(x)) \vee p(a)\ \equiv\ (\neg \forall x\ \neg p(x)) \to p(a))\ \equiv$
$(\exists x\ p(x)) \to p(a)$.

Formule E Cette formule est forcement vraie dans les deux interprétations, puisque *elle est valide.* Pour le voir, supposons, par absurde, qu'elle soit fausse pour une interprétation $\mathcal{I}$. Ceci voudrait dire que sa négation, qui est $\neg\exists x(p(x) \to p(a))$, devrait être vraie pour $\mathcal{I}$. Mais $\neg\exists x(p(x) \to p(a)) \equiv \forall x\ \neg(p(x) \to p(a))$, et cette dernière formule est évidemment équivalente à $\forall x\ ((p(x) \wedge \neg p(a))$, car $\neg(A \to B)\ \equiv A \wedge \neg B$. Donc il faudrait que $\forall x\ ((p(x) \wedge \neg p(a))$ soit vraie dans $\mathcal{I}$, mais c'est impossible que, au même temps, p soit vraie pour tout élément de l'univers mais fausse pour l'élément qui se nomme a. On est donc arrivé à une contradiction.

Formule F Cette formule est forcement vraie dans les deux interprétations, puisque *elle est valide.* En fait, étant donné une interprétation quelconque $\mathcal{I}$, ou bien $p(a)$ est fausse, et dans ce cas la formule F est évidemment vraie, ou bien $p(a)$ est vraie, mais, dans ce cas, $\exists x p(x)$ aussi (il suffit de prendre la valeur de x égale à celle de a) et, à nouveau, l'implication est vraie.

3 Exercice 3

1. (a) Le premier raisonnement n'est pas correct. Par example, l'ensemble E1 des entiers négatifs ou nuls, a un maximum, qui est 0, pourtant il est infini. Tout simplement, on ne peut pas déduire la conlusion à partir des 2 premisses, car la première premisse dit que être fini est une condition **suffisante** pour avoir un maximum, pas nécessaire! Elle n'esclue pas la présence d'un ensemble infini et qui, pourtant, a un maximum.

   (b) Le second raisonnement est correct. La première premisse dit que tout ensemble y qui n'est pas infini (c'est-à-dire qu'il fini), a la propriété, disons $M(y)$, d'avoir un maximum. La seconde premisse dit que e_2, en effet, est un ensemble fini. La conclusion, qui dit que e_2 a bien la propriété M, découle bien des 2 premisses! Remarque : que les premisses soient vraies ou fausses, n'a pas d'importance. Le point pertinent, par rapport à la correction du raisonnement, est que SI elles sont vraies, alors la conclusion est <u>forcement</u> vraie, en vertue de la structure logique du raisonnement lui-même.

2. On utilise ici une formule déjà écrite dans l'exercice 1 (voir à nouveau la définition de $M(y)$).

(a) Raisonnement 1.
$Pr_1 = \forall y\ ((S(y) \wedge F(y)) \to M(y))$
$Pr_2 = S(e_1) \wedge M(e_1)$.
$Concl = S(e_1) \wedge F(e_1)$

Une interprétation qui rend $Pr_1 \wedge Pr_2$ vraie mais $Concl$ fausse est celle même suggerée par l'énoncé en français, en interprétant, par exemple, la constante e_1 comme l'ensemble des nombres entiers négatifs ou nuls !

(b) Raisonnement 2.
$Pr_1 = \forall y\ ((S(y) \wedge F(y)) \to M(y))$
NB: "y n'est pas infini" se formalise par $\neg\neg F(y)$, qui est logiquement équivalent à $f(y)$.
$Pr_2 = S(e_2) \wedge F(e_2)$.
$Concl$: $M(e_2)$.
Il est clair que, peut importe l'interprétation choisie, étant donnés la signification logique de $\forall$ et celle $\to$, si $Pr_1 \wedge Pr_2$ est vraie alors $M(e_2)$ l'est forcement. D'ailleurs, si vous faites (correctement !) un tableau pour tester la validité de $(Pr_1 \wedge Pr_2) \to M(e_2))$, vous trouverez bien que cette formule est valide (mais le tableau n'était pas démandé par cet exercice). $Concl = S(e_1) \wedge F(e_1)$

4 Exercice 4

1. Soit la formule (satisfiable) $\forall x\ p(x)$. Tout tableau ayant cette formule comme racine aura la forme :

$$\begin{array}{c}
1)\ \ \forall x\ p(x) \\
\downarrow\ \ (\gamma) \\
2)\ \ p(l_1), \forall x\ p(x) \\
\downarrow\ \ (\gamma) \\
\vdots \\
n+1)\ \ p(l_1), \cdots, p(l_n), \forall x\ p(x) \\
\vdots
\end{array}$$

   et ne terminera jamais.

2. Voici un tableau qui montre que la formule est satisfiable (b, c et d sont des constantes <u>nouvelles</u>) :

$$1)\ \ \exists y\ r(a,y) \land \exists x\ \exists y\ \neg r(x,y)$$
$$\downarrow\ \ (\alpha)$$
$$2)\ \ \exists y\ r(a,y),\ \ \exists x\ \exists y\ \neg r(x,y)$$
$$\downarrow\ \ (\delta)$$
$$3)\ \ r(a,b),\ \ \exists x\ \exists y\ \neg r(x,y)$$
$$\downarrow\ \ (\delta)$$
$$4)\ \ r(a,b),\ \ \exists y\ \neg r(c,y)$$
$$\downarrow\ \ (\delta)$$
$$5)\ \ r(a,b),\ \ \ \neg r(c,d)$$

Dans la feuille, on n'a que des constantes, et il n'y a pas d'unification possible ! Donc ce tableau est complet et ouvert, donc la racine est satisfiable.

3. Afin de tester si la formule est valide, il faut d'abord construire sa négation :

$$\neg(\exists x \forall y\ r(x,y) \to \forall y \exists x\ r(x,y))$$

La formule ci-dessus est logiquement équivalente à

$$\exists x \forall y\ r(x,y)\ \ \land\ \ \neg(\forall y \exists x\ r(x,y)$$

ce qui, quand l'on réecrit en forme normale de négation, donne :

$$\exists x \forall y\ r(x,y)\ \ \land\ \ \exists y \forall x\ \neg r(x,y)$$

Cette dernière formule sera la racine du tableau. Ci-dessous, a et b sont des une nouvelle constante, tandis que l_1, l_2 sont des paramètres (donc des variables).

$$1)\ \ \exists x \forall y\ r(x,y)\ \ \land\ \ \exists y \forall x\ \neg r(x,y)$$
$$\downarrow\ \ (\alpha)$$
$$2)\ \ \exists x \forall y\ r(x,y),\ \ \exists y \forall x\ \neg r(x,y)$$
$$\downarrow\ \ (\delta)$$
$$3)\ \ \forall y\ r(a,y),\ \ \exists y \forall x\ \neg r(x,y)$$
$$\downarrow\ \ (\delta)$$
$$4)\ \ \forall y\ r(a,y),\ \ \forall x\ \neg r(x,b)$$
$$\downarrow\ \ (\gamma)$$
$$5)\ \ r(a,l_1),\ \ \forall x\ \neg r(x,b), \forall y\ r(a,y)$$
$$\downarrow\ \ (\gamma)$$
$$6)\ \ \ r(a,l_1),\ \ \neg r(l_2,b), \forall y\ r(a,y), \forall x\ \neg r(x,b)$$

La substitution $\{l_1/b, l_2/a\}$ permet de clore le tableau. La racine est donc insatisfiable, donc la formule de l'énoncé, dont elle était la negation, est valide.