

## Dépendances fonctionnelles

### Exercice 1

Soient  $A, B, C, D, E$  et  $F$  des attributs. En utilisant exclusivement la définition d'implication de dépendances, démontrer ou réfuter les assertions suivantes :

1.  $\{A \rightarrow BC, A \rightarrow E\}$  implique  $A \rightarrow BCE$
2.  $\{A \rightarrow BC, BCE \rightarrow F\}$  implique  $AE \rightarrow F$
3.  $\{C \rightarrow B\}$  implique  $C \rightarrow BD$

#### Correction :

1. (Vrai, Union). Soit  $r$  une relation satisfaisant  $A \rightarrow BC$  et  $A \rightarrow E$ . Soient  $t$  et  $t'$  deux  $n$ -uplets de  $r$  tels que  $t(A) = t'(A)$ . On a :  $t(BC) = t'(BC)$  et  $t(E) = t'(E)$ . Donc  $t(BCE) = t'(BCE)$ . On en conclue que  $r$  satisfait  $A \rightarrow BCE$ .
2. (Vrai, Pseudo-Transitivité). Soit  $r$  une relation satisfaisant  $A \rightarrow BC$  et  $BCE \rightarrow F$ . Soient  $t$  et  $t'$  deux  $n$ -uplets de  $r$  tels que  $t(AE) = t'(AE)$ . A cause de la première dépendance,  $t(BC) = t'(BC)$ . D'autre part,  $t(E) = t'(E)$ . Donc  $t(BCE) = t'(BCE)$ . A cause de la deuxième dépendance, on peut conclure que  $t(F) = t'(F)$ .
3. (Faux). Ici, il suffit un contre-exemple simple : une table  $R(CBD)$  avec 2 seuls triplets  $\langle c, b, d1 \rangle$  et  $\langle c, b, d2 \rangle$

### Exercice 2

Dans cet exercice, on utilisera exclusivement l'algorithme de calcul de la fermeture d'un ensemble d'attributs  $X$  par rapport à un ensemble de dépendances fonctionnelles  $F$  (et le théorème associé).

1. Mêmes questions que pour l'exercice 1 (mais il faut justifier les réponses autrement !)
2. Est-il vrai que  $\{A \rightarrow B\}$  implique  $\emptyset \rightarrow AB$  ? Comment expliquez vous, intuitivement, votre réponse ?

**Correction :** C'est mécanique. Mais, pour le second "item" où la réponse est "Non" (car on ne bouge jamais de la valeur initiale  $res$ , qui est  $\emptyset$ ) il faut expliquer l'intuition. Dire que une table  $r$  satisfait  $\emptyset \rightarrow AB$  revient à dire que tout couple de  $n$ -uplets  $t, t'$  est tel que  $t(AB) = t'(AB)$ . Or, pour expliquer le résultat trouvé, raisonner sur la table  $R(AB)$  dont les seuls couples sont  $\langle a1, b1 \rangle$  et  $\langle a2, b2 \rangle$

### Exercice 3

Soit  $ARM$  la formulation suivante du système de preuve d'Armstrong pour les dépendances fonctionnelles :

- Toute dépendance  $X \rightarrow Y$  telle  $Y \subseteq X$  est un *axiome*.
- On a deux règles d'inférence :

1. Si on a  $X \rightarrow Y$ , alors on peut dériver  $XZ \rightarrow YZ$  (*Augmentation*)
2. Si on a  $X \rightarrow Y$  et  $Y \rightarrow Z$ , alors on peut dériver  $X \rightarrow Z$  (*Transitivité*)

Ce système est correct et complet par rapport à l'implication : Un ensemble  $F$  de DF implique une df  $X \rightarrow Y$  si et seulement si il existe une preuve de  $X \rightarrow Y$  à partir de l'ensemble d'hypothèses  $F$ .

Utiliser *ARM* et ce théorème (mais rien d'autre) pour chercher une réponse aux questions suivantes :

1. Soient  $X, Y$  et  $Z$  trois ensembles d'attributs quelconques. Est-il vrai que  $\{X \rightarrow Y\}$  implique  $XZ \rightarrow Y$  ?  
NB :  $XZ$  abrège  $X \cup Z$ .
2. Est-il vrai que  $\{A \rightarrow B\}$  implique  $ACD \rightarrow B$  ?
3. Est-il vrai que  $F = \{B \rightarrow CD, D \rightarrow E\}$  implique  $AB \rightarrow E$  ?
4. Est-il vrai que  $\{A \rightarrow BC, A \rightarrow E\}$  implique  $A \rightarrow BCE$  ?  
Attention, cette fois ci il faut utiliser ARM, pour répondre (à différence de l'exercice 1).
5. Et il vrai que  $\{A \rightarrow BC, BCE \rightarrow F\}$  implique  $AE \rightarrow F$  ?  
Idem. il faut utiliser ARM, pour répondre (à différence de l'exercice 1).
6. Est-il vrai que  $\{AB \rightarrow C\}$  implique  $B \rightarrow C$  ? Même question pour  $\{A \rightarrow C\}$  implique  $A \rightarrow CD$ .  
A nouveau, utiliser ARM pour répondre.

**Correction :** On peut d'abord illustrer le système pour montrer, par exemple :  $\{A \rightarrow BC, A \rightarrow E\}$  implique  $A \rightarrow BCE$  :

- 1)  $A \rightarrow BC$  hyp
- 2)  $AE \rightarrow BCE$  2, Aug
- 3)  $A \rightarrow E$  hyp
- 4)  $A \rightarrow AE$  3, aug (nb :  $AA=A$ )
- 5)  $A \rightarrow BCE$  4, 2 Trans

1. Oui.  
  - 1)  $X \rightarrow Y$  hyp  $\in F$  :  $\{X \rightarrow Y\}$
  - 2)  $XZ \rightarrow YZ$  1, Aug
  - 3)  $YZ \rightarrow Y$  axiome
  - 4)  $XZ \rightarrow Y$  2, 3 Trans
2. Oui. Cas particulier de la question ci-dessus.
3. Oui  
  - 1)  $B \rightarrow CD$  hyp  $\in F$
  - 2)  $AB \rightarrow ACD$  1, Augmentation
  - 3)  $ACD \rightarrow CD$  Axiome
  - 4)  $AB \rightarrow CD$ , 2,3 Trans
  - 5)  $D \rightarrow E$ , hyp  $\in F$
  - 6)  $CD \rightarrow CE$  3, Aug
  - 7)  $CE \rightarrow E$  Axiome
  - 8)  $CD \rightarrow E$  6,8 Trans
  - 9)  $AB \rightarrow E$  4, 8 Trans

4. OUI.

- 1)  $A \rightarrow E$  hyp  $\in F$
- 2)  $A \rightarrow AE$  1, Aug
- 3)  $A \rightarrow BC$  hyp  $\in F$
- 4)  $AE \rightarrow BCE$  3, Aug
- 5)  $A \rightarrow BCE$  2, 4 Trans

5. OUI

- 1)  $A \rightarrow BC$  hyp  $\in F$
- 2)  $AE \rightarrow BC$  2, Augm
- 3)  $BCE \rightarrow F$  hyp  $\in F$
- 4)  $AE \rightarrow F$  2, 3, Trans

6. Faux, les 2 fois.

Dire juste “je ne trouve pas de déduction” n’est pas une justification. Il faudra **donner 2 contre-exemples** et expliquer ce que la correction du système ARM veut dire pour justifier la réponse.

Topos sur le fait que ARM ne fournit pas d’algo de décision de l’implication.