Exercices

Exercice 1

L'ensemble d'opérateurs $E = \{\bigcirc, \mathcal{U}\}$ permet de définir tous les autres opérateurs vus en cours, car il est possible de définir $\Diamond$ et $\Box$ à partir de E.
Démontrez le, en commençant par $\Diamond$.

Exercice 2

Deux parmi ces formules sont équivalentes. Lesquelles ?

1. $\Diamond\Box A$
2. $\Box(A \to \bigcirc A)$
3. $\Diamond A \wedge \Box(A \to \bigcirc A)$

Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux formules, parmi les trois ci-dessus, qui ne sont pas équivalentes. Indiquer une interprétation permettant de les distinguer.

Exercice 3

Exprimer en LTL : p est vraie avant r. (C'est à dire : tôt ou tard r est vraie, mais p est vraie avant le premier istant où r est vraie).

Exercice 4

Ici, on considère un nouveau opérateur binaire $\mathcal{R}$ (*release*), qui a la sémantique suivante :
$\mathcal{I}, i \models F\mathcal{R}G$ ssi on a un des ces 2 cas :

1. Quelque soit $k \geq i$, $\mathcal{I}, k \models G$
2. Il existe un k tel que $k \geq i$, $\mathcal{I}, k \models F$ et, quelque soit j tel que $i \leq j \leq k$, on a : $\mathcal{I}, j \models G$

Utiliser les définitions sémantiques pour démontrer :

$$F\mathcal{R}G \;\equiv\; \neg((\neg F)\mathcal{U}(\neg G))$$

Exercice 5

1. Soit A la formule de LTL :
   $(\Diamond\neg p) \wedge \Box(\neg p \vee \bigcirc p)$.

   (a) Construire un tableau $\mathcal{T}$ de racine A (sans l'élaguer)

   (b) Construire un automate généralisé de Büchi $\mathcal{A}_A$.

   (c) Existe-t-il au moins un mot qui est accepté par cet automate ? Si oui, en donner un.

   (d) Existe-t-il au moins un mot qui n'est pas accepté par cet automate ? Si oui, en donner un.

   (e) Que peut on conclure sur la satifiabilité de A ?

2. Mêmes questions pour la formule B : $\Box((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg p))$.

Exercice 6

Rappelons qu'une interprétation $\mathcal{I}$ peut être vue comme une fonction $\mathbb{N} \to 2^P$, où P est l'ensemble des lettres propositionnelles. Soit $P = \{q\}$.
Donner une formule A qui dit que q est vraie exactement aux états (nombre naturels) pairs.

Exercice 7

– En utilisant les définitions sémantiques, démontrer :

$$A\mathcal{U}B \equiv B \vee (A \wedge \bigcirc(A\mathcal{U}B))$$

– En utilisant les définitions sémantiques, démontrer :

$$\neg(A\mathcal{U}B) \equiv \Box\neg B \vee (\neg B\mathcal{U}(\neg A \wedge \neg B))$$