Feuille de TD 2 de Spécifications Formelles
M1 2012-2013

Les fichiers en format pdf des projections du cours sont disponibles, au fur et à mésure, sur la page :
http ://www.ibisc.univ-evry.fr/~serena

1 Calcul de la *weakest precondition*

Exercice 1

Calculez les *weakest preconditions* suivantes :

1. $[serve := next](serve < 20)$
2. $[serve := next](next < 20)$
3. $[serve := next](serve < next)$
4. $[next := next + 1](next < serve \times 20)$
5. $[next := next + 1](serve < 600)$
6. $[serve := serve + 1](\forall serve(serve \in 1 \ldots 1000 \rightarrow serve < next))$

Exercice 2

Calculez les *weakest preconditions* suivantes :

1. $[house\_set := house\_set \cup \{new\}](house\_set \subseteq 5 \ldots 27)$
2. $[house\_set := house\_set \cup \{new\}](card(house\_set) < 17)$
3. $[house\_set := house\_set - old\_set](17 \in house\_set)$
4. $[house\_set := house\_set \cup \{new\}](house\_set \neq \emptyset)$
5. $[house\_set := house\_set \cup \{new\}](17 \notin house\_set)$

Exercice 3

Calculez les *weakest preconditions* suivantes :

1. $[serve, next := serve + 2, next - 1](serve \leq next)$
2. $[serve, next := next, next + 1](serve \leq next)$
3. $[serve, next := next, serve](serve \leq next)$

4. $[serve := next || next := other](serve \leq next)$
5. $[serve := serve + next || next := serve - next](serve \leq next)$

Exercice 4

Calculez les *weakest preconditions* suivantes :

1. [**IF** $x > 7$ **THEN** $x := x - 4$ **ELSE** $x := x + 3$ **END**]$(x > 12)$
2. [**IF** $x > 7$ **THEN** $x := x - 4$ **ELSE** $y := x + 3$ **END**]$(y > x)$
3. [**IF** $x > 7$ **THEN** $x, y := x - 4, x + 2$ **ELSE** $y := y + 3$ **END**]$(y > x)$
4. [**IF** $serve < next$ **THEN** $serve := serve + 1$ **ELSE** $next := next + 1$ **END**]$(serve \leq next)$
5. [**IF** $mike \in office$ **THEN** $office := office - \{olivia\}$ **ELSE** $office := office - \{mike\}$ **END**]$(nell \in office)$
6. [**IF** $mike \in office$ **THEN** $office := office - \{olivia\}$ **ELSE** $office := office - \{mike\}$ **END**]$(office = \{mike, nell, olivia\})$
7. [**IF** $mike \in office$ **THEN** $office := office - \{olivia\}$ **ELSE** $office := office - \{mike\}$ **END**]$(office = \{mike\})$

Exercice 5

Une autre généralisation du constructeur **IF** envisage des clauses *elseif* tels que :

IF E_1 **THEN** S_1
ELSEIF E_2 **THEN** S_2
ELSEIF ...
ELSEIF E_n **THEN** S_n
ELSE S_{n+1}
END

Il est éxécuté comme il suit : d'abord E_1 est evalué, et s'il est vrai alors S_1 est éxécuté ; autrement E_2 est evalué, et S_2 éxécuté si E_2 est vrai. La procédure continue jusqu'à E_n. Enfin, si toutes gardes sont fausses, alors S_{n+1} est éxécuté.

Donnez la régle de la *weakest precondition* pour la commande **IF** avec les clauses **ELSEIF** .

Exercice 6

Calculez les *weakest preconditions* suivantes :

1. $[serve := serve + new](serve \leq next)$
2. $[serve, next := serve + new, next + 1](serve \leq next)$
3. $[x, y, house\_set := x - 1, y + 1, house\_set \cup \{x, y\}](house\_set \subseteq x \ldots y)$

4. [**IF** $new \notin house\_set$ **THEN** $house\_set := house\_set \cup \{new\} || num := num + 1$ **END**]$(num = card(house\_set))$
5. [**IF** $new \in house\_set$ **THEN** $house\_set := house\_set - \{new\} || old\_set := old\_set \cup \{new\}$ **END**]$(house\_set \cap old\_set = \emptyset)$

2 Cohérence d'une AM

Exercice 1

Quelles des clauses d'initialisation suivantes sont cohérentes avec l'invariant de *Ticket*, $serve \in \mathbb{N} \wedge next \in \mathbb{N} \wedge serve \leq next$?

1. $serve, next := 25, 26$
2. $serve, next := 26, 25$
3. $serve, next := serve + 1, next + 1$

Exercice 2

Analysez l'obligation de preuve pour controler que les opérations suivantes sont cohérent avec la machine *Ticket* :

$tt \leftarrow$ **take_ticket** $\widehat{=}$
PRE $true$
THEN $tt, next := next, next + 1$
END
END

$tt \leftarrow$ **replace_ticket** $\widehat{=}$
PRE $true$
THEN $next := next - 1$
END ;

3 Examples des solutions

Exercice 1

1. $(next < 20)$
2. $(next < 20)$
3. $(next < next) = false$
4. $(next + 1 < serve \times 2)$
5. $(serve < 600)$
6. $(\forall serve(serve \in 1 \ldots 1000 \rightarrow serve < next)) =$
   $(\forall x(x \in 1 \ldots 1000 \rightarrow x < next)) =$
   $1000 < next$

Exercice 2

1. $(house\_set \cup \{new\} \subseteq 5 \ldots 27) = (house\_set \subseteq 5 \ldots 27 \wedge new \in 5 \ldots 27)$
2. $(card(house\_set \cup \{new\}) < 17) =$
   $(new \in house\_set \wedge card(house\_set) < 17) \vee (new \notin house\_set \wedge card(house\_set) <$
   $16)$
3. $(17 \in house\_set - old\_set) = (17 \in house\_set \wedge 17 \notin old\_set)$
4. $(house\_set \cup \{new\} \neq \emptyset) = true$
5. $(17 \notin house\_set \cup \{new\}) = (17 \notin house\_set \wedge new \neq 17)$

Exercice 3

1. $(serve + 2 \leq next - 1) = (serve + 3 \leq next)$
2. $(next \leq next + 1) = true$
3. $(next \leq serve)$
4. $(next \leq other)$
5. $(serve + next \leq serve - next) = (next = 0)$

Exercice 4

1. $[\textbf{IF} \quad x > 7 \ \textbf{THEN} \quad x := x - 4 \ \textbf{ELSE} \quad x := x + 3 \ \textbf{END}](x > 12) =$
   $(x > 7 \wedge [x := x - 4](x > 12)) \vee (x \leq 7 \wedge [x := x + 3](x > 12))$
   $(x > 7 \wedge x > 16) \vee (x \leq 7 \wedge x > 9))$
   $(x > 16) \vee false$
   $(x > 16)$
2. $(x \leq 7)$
3. $(x > 7 \vee y + 3 > x)$
4. $(serve \leq next + 1)$
5. $(nell \in office)$

6. $(office = \{nell, olivia\})$
7. [**IF** $mike \in office$ **THEN** $office := office - \{olivia\}$ **ELSE** $office := office - \{mike\}$ **END**]$(office = \{mike\}) =$
$(mike \in office \wedge office - \{olivia\} = \{mike\}) \vee (mike \notin office \wedge officecup\{mike\} = \{mike\}) =$
$(office = \{mike, olivia \vee office = \{mike\} \vee office = \emptyset)$

Exercice 5

La formule correspondante au constructeur **ELSEIF** est :

$$\begin{array}{lll} (E_1 \wedge [S_1]P) & \vee & (\neg E_1 \wedge E_2 \wedge [S_2]P) \\ & \vee & (\neg E_1 \wedge \neg E_2 \wedge E_3 \wedge [S_3]P) \\ & \vdots & \\ & \vee & (\neg E_1 \wedge \neg E_2 \wedge \ldots \wedge E_n \wedge [S_n]P) \\ & \vee & (\neg E_1 \wedge \neg E_2 \wedge \ldots \wedge \neg E_n \wedge [S_{n+1}]P) \end{array}$$

Exercice 6

1. $(serve + new \leq next)$
2. $(serve + new \leq next + 1)$
3. $(house\_set \cup \{x, y\} \subseteq x + 1 \ldots y - 1)$
4. [**IF** $new \notin house\_set$ **THEN** $house\_set := house\_set \cup \{new\} || num := num + 1$ **END**]$(num = card(house\_set)) =$
$((new \notin house\_set) \wedge [house\_set := house\_set \cup \{new\} || num := num + 1](num = card(house\_set))) \vee (new \in house\_set \wedge (num = card(house\_set))) =$
$((new \notin house\_set) \wedge (num + 1 = card(house\_set \cup new)) \vee ((new \in house\_set) \wedge (num = card(house\_set)))) =$
$num = card(house\_set)$
5. [**IF** $new \in house\_set$ **THEN** $house\_set := house\_set - \{new\} || old\_set := old\_set \cup \{new\}$ **END**]$(house\_set \cap old\_set = \emptyset) =$
$((new \in house\_set) \wedge [house\_set := house\_set - \{new\} || old\_set := old\_set \cup \{new\}](house\_set \cap old\_set = \emptyset)) \vee ((new \notin house\_set) \wedge (house\_set \cap old\_set = \emptyset)) =$
$((new \in house\_set) \wedge (house\_set - \{new\} \cap old\_set \cup \{new\} = \emptyset)) \vee ((new \notin house\_set) \wedge (house\_set \cap old\_set = \emptyset))$
$(house\_set \cap old\_set = \emptyset)$

Exercice 1

1. Oui.
2. No.
3. ça dépend.

Exercice 2

$$
\begin{aligned}
I \wedge P \rightarrow [S]I &= (serve \in \mathbb{N} \wedge next \in \mathbb{N} \wedge serve \leq next) \wedge true \rightarrow \\
&\quad [tt, next := next, next + 1](serve \in \mathbb{N} \wedge next \in \mathbb{N} \wedge serve \leq next) \\
&= (serve \in \mathbb{N} \wedge next \in \mathbb{N} \wedge serve \leq next) \rightarrow \\
&\quad (serve \in \mathbb{N} \wedge next + 1 \in \mathbb{N} \wedge serve \leq next + 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I \wedge P \rightarrow [S]I &= (serve \in \mathbb{N} \wedge next \in \mathbb{N} \wedge serve \leq next) \wedge true \rightarrow \\
&\quad [next := next - 1](serve \in \mathbb{N} \wedge next \in \mathbb{N} \wedge serve \leq next) \\
&= (serve \in \mathbb{N} \wedge next \in \mathbb{N} \wedge serve \leq next) \rightarrow \\
&\quad (serve \in \mathbb{N} \wedge next - 1 \in \mathbb{N} \wedge serve \leq next - 1)
\end{aligned}
$$