Examen de Logique – Licence - IUP2 1999 / 2000

18 janvier 2000. Durée : 3 heures

Documents autorisés: poly, notes de cours, notes de TD.
Tout résultat déjà prouvé en cours et/ou en TD peut être utilisé sans besoin de le démontrer à nouveau.
Le barème est donné à titre indicatif et il est susceptible d'être modifié.

Exercice 1: 7 points

Dans cet exercice, on considère un langage $\mathcal{L}$ du calcul des prédicats contenant les constantes $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8$, pas d'autre symboles de fonction et 5 prédicats unaires : P_1, P_2, P_3, P_4, P_5. On utilisera ce langage pour décrire des propriétés d'un carré constitué de 9 points (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8) disposés ainsi :

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{array}$$

Figure1

Ici, par *ligne* du carré on entend un *ensemble* contenant exactement 3 points alignés soit horizontalement soit verticalement, soit en diagonale. Par exemple, $\{0,1,2\}$ est une ligne, ainsi que $\{0,4,8\}$ et $\{1,4,7\}$

On considère l'interprétation $\mathcal{I}_1$ suivante de $\mathcal{L}$:

- L'univers de discours (le domaine) est l'ensemble $D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$
- Pour tout j tel que $0 \leq j \leq 8$, $\mathcal{I}_1(c_j) = j$
- Pour tout i tel que $1 \leq i \leq 5$, $\mathcal{I}_1(P_i)$ s'évalue en *vrai* sur les éléments de l'ensemble :
  $\{n \mid n \in D$ et n est exactement sur i lignes du carré de la figure 1$\}$

Ainsi, par exemple $P_2(c_1)$ est vraie pour cette interprétation, car le point 1 se trouve exactement sur deux lignes : $\{0,1,2\}$ et $\{1,4,7\}$, mais $P_2(c_0)$ est fausse car le point 0 se trouve sur trois lignes : $\{0,1,2\}$, $\{0,3,6\}$ et $\{0,4,8\}$.

1. Pour chacune des formules suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse par rapport à l'interprétation $\mathcal{I}_1$; justifiez vos réponses *de façon rapide et informelle.*

   (a) $\forall x\ (P_1(x)\ \vee P_2(x)\ \vee P_3(x)\ \vee P_4(x)\ \vee P_5(x))$

   (b) $\exists x\ (P_1(x) \wedge P_2(x)\ \wedge P_3(x)\ \wedge P_4(x)\ \wedge P_5(x))$

   (c) $\forall x\ P_1(x)\ \vee \forall x\ P_2(x)\ \vee \forall x\ P_3(x)\ \vee \forall x\ P_4(x)\ \vee \forall x\ P_5(x)$

(d) $\exists x\ P_1(x) \rightarrow \exists x P_5(x)$

2. Existe-t-il une interprétation $\mathcal{I}_2$ ayant le même univers de discours que $\mathcal{I}_1$ et telle que toutes les formules ci-dessus soient vraies ? Si oui, l'indiquer, sinon, expliquer pourquoi.

3. Existe-t-il une interprétation $\mathcal{I}_3$ ayant le même univers de discours que $\mathcal{I}_1$ et telle que toutes les formules ci-dessus soient fausses ? Si oui, l'indiquer, sinon, expliquer pourquoi.

4. Existe-t-il une interprétation $\mathcal{I}_4$, ayant le même univers de discours que $\mathcal{I}_1$ et telle que la première et la quatrième formule soient fausses mais les autres deux vraies ? Si oui, l'indiquer, sinon, expliquer pourquoi.

Solution.

1. La formule (a) est vraie car tout point, à l'exception de 4, est exactement sur 2 lignes ou 3 lignes, et 4 est exactement sur 4 lignes. Donc la formule $\forall x\ (P_2(x) \vee P_3(x) \vee P_4(x))$ est vraie, donc, par conséquence logique, (a) aussi .
   La formule (b) est fausse, car si $i \neq j$, aucun point ne peut être exactement sur i lignes et j lignes.
   La formule (c) est fausse, car il n'existe pas de i tel que tout point du carré de la fig.1 soit exactement sur i lignes.
   La formule (d) est vraie, car $\exists x\ P_1(x)$ est fausse.

2. Il existe une interprétation $\mathcal{I}_2$, ayant le même univers de discours que $\mathcal{I}_1$ et telle que toutes les formules ci-dessous soient vraies.
   Il suffit de poser $\mathcal{I}_2(P_i) = D$, pour tout i tel que $1 \leq i \leq 5$.

3. Il existe une interprétation $\mathcal{I}_3$, ayant le même univers de discours que $\mathcal{I}_1$ et telle que toutes les formules ci-dessous soient fausses.
   Il suffit de poser $\mathcal{I}_3(P_1) = \{1\}$ et $\mathcal{I}_3(P_j) = \emptyset$, pour tout i tel que $1 < i \leq 5$.

4. Il n'existe pas d'interprétation $\mathcal{I}_4$, ayant le même univers de discours que $\mathcal{I}_1$ et telle que la première et la quatrième formule soient fausses mais les autres deux vraies, car la formule (a) est conséquence logique de la formule (c).

Exercice 2 : 5 points

Dans cet exercice, a est la seule constante, x, y, w, z sont des variables. Donner une réfutation de l'ensemble de clauses suivant :
(1)$\neg E(x) \vee V(x) \vee S(x, f(x))$, (2)$\neg E(x) \vee V(x) \vee C(f(x))$, (3)$P(a)$, (4)$E(a)$,
(5)$\neg S(a, y) \vee P(y)$, (6)$\neg P(z) \vee \neg V(z)$, (7)$\neg P(w) \vee \neg C(w)$
S'il vous plaît, dans la rédaction de votre réponse, indiquez toute clause appartenant à l'ensemble ci-dessus par son numéro, sans la réécrire.

Solution.
Voici une réfutation :
(8) $\neg V(a)$ 3,6, RES
(9) $V(a) \vee C(f(a))$ 2,4, RES

(10) $C(f(a))$ 8,9, RES
(11) $V(a) \vee S(a, f(a))$ 1,4, RES
(12) $S(a, f(a))$ 8,11, RES
(13) $P(f(a))$ 12,5, RES
(14) $\neg C(f(a))$ 13,7, RES
(15) $\emptyset$ 10,14, RES

Exercice 3 : 4 points

Soit L un langage du calcul des prédicats contenant un seul symbole de prédicat, r, à deux arguments, et aucun symbole de fonction. Ecrire deux formules closes de L, A_1 et A_2, telles que :

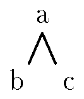
1. A_1 a un modèle dont le domaine a exactement deux éléments mais est fausse dans toute interprétation dont le domaine a un seul élément.
2. A_2 a un modèle dont le domaine a exactement trois éléments mais est fausse dans toute interprétation dont le domaine a moins de trois éléments.

Limitez vous à écrire les formules, sans les justifier.

Solution.
Pour A_1, il suffit de prendre $\forall x \neg r(x, x) \wedge \exists y \exists z r(y, z)$. Pour A_2, par exemple :
$\forall x \neg r(x, x) \wedge \exists w \exists y \exists z((r(w, y) \wedge r(y, z)) \wedge r(w, z))$

Exercice 4 : 4 points

Dans cet exercice de PROLOG, on représente les arbres binaires à l'aide de la constante "vide", qui représente l'arbre vide, et le symbole de fonction ternaire "arb" : un terme de la forme arb(Element,G,D) représente un arbre dont la racine est Element, le sous-arbre gauche est G, le sous-arbre droit est D. Par exemple, l'arbre



est représenté par le terme : arb(a,arb(b,vide,vide),arb(c,vide,vide)). On rappelle que les nœuds d'un arbre binaire sont lus en ordre *préfixe* quand, quelque soit le nœud n, n est lu d'abord, puis les nœuds du sous-arbre gauche sont lus, puis ceux du sous-arbre droit. Ils sont lus en ordre *infixe* quand d'abord on lit les nœuds du sous-arbre gauche de n, puis n, puis les nœuds du sous-arbre droit de n. Ils sont lus en ordre *suffixe* quand d'abord on lit les nœuds du sous-arbre gauche de n, puis les nœuds du sous-arbre droit de n, puis n.

Ci-dessous, on aura le droit d'utiliser la représentation standard des listes et le prédicat prédéfini append/3 tel que append(L1,L2,L3) est vrai si L3 est la liste obtenue en concaténant la liste L1 avec la liste L2.

1. Écrire la définition PROLOG du prédicat préfixe/2 tel que préfixe(Arbre,L) est vrai ssi L est la liste des nœuds de l'arbre binaire Arbre, lus en ordre préfixe.
2. Ecrire la définition PROLOG du prédicat infixe/2 tel que infixe(Arbre,L) est vrai ssi L est la liste des nœuds de l'arbre binaire Arbre, lus en ordre infixe.
3. Ecrire la définition PROLOG du prédicat suffixe/2 tel que suffixe(Arbre,L) est vrai ssi L est la liste des nœuds de l'arbre binaire Arbre, lus en ordre suffixe.
4. Ecrire la définition PROLOG du prédicat sommearbre/2 tel que, si A est un arbre dont les nœuds sont étiquetés par des entiers naturels et N est un entier naturel, sommearbre(A,N) est vrai ssi N est la somme des (étiquettes des) nœuds de A. On aura le droit d'utiliser la représentation standard des entiers naturels en PROLOG (0,1,2,...) et un prédicat somme/3, tel que somme(N,M,Z) est vrai ssi N,M, Z sont des entiers naturels et N+M=Z (sans le définir).

Solution.
Voici une solution possible:

```
prefixe(vide,[]).
prefixe(arb(R,G,D),[R|S]):- prefixe(G,G1), prefixe(D,D1), append(G1,D1,S).
```

```
infixe(vide,[]).
infixe(arb(R,G,D),L):- infixe(G,G1), infixe(D,D1), append(G1,[R|D1],L).
```

```
suffixe(vide,[]).
suffixe(arb(R,G,D),L):- suffixe(G,G1), suffixe(D,D1),
                        append(G1,D1,M), append(M,[R], L).

sommearbre(vide,0).
sommearbre(arb(N,G,D),Res):- sommearbre(G,G1), sommearbre(D,D1),
                             somme(G1,D1,M), somme(M,N, Res).
```