TD 1 de Logique – Licence d'Informatique - IUP2 2000 / 2001

1 Logique Propositionnelle: Syntaxe

Exercice 1

Soit **P** l'ensemble des variables propositionnelles. Parmi toutes les expressions de longueur inférieure ou égale à 11 construites sur

$$\mathbf{P} \cup \{\ \mathcal{V},\ \mathcal{F},\ \vee,\ \wedge,\ \neg,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ (\ ,\ )\ \}$$

caractériser celles qui sont des formules bien formées. Utiliser la définition de formule bien formée donnée en cours.

Exercice 2

Pour chacune des formules suivantes, indiquer son connecteur principal, puis utiliser les conventions établies pour la réduction du nombre des parenthèses pour en éliminer le plus possible :

1. $(\neg((p \wedge q) \rightarrow p))$ 2. $(p \rightarrow (q \vee (\neg q)))$ 3. $((q \vee (\neg(q \wedge q))) \rightarrow (\neg p))$

Exercice 3

1. Donner toutes les sous-formules de la formule: $\neg(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \wedge q)$
2. Soit F une formule propositionnelle à n connecteurs. Quel est le nombre maximum de sous-formules de F ? Le démontrer par récurrence sur n.

Exercice 4

Soit A une formule propositionnelle bien formée *complètement parenthésée*. On note $n(A)$ le nombre d'occurrences du connecteur "$\neg$" ($n(A) \geq 0$) et $b(A)$ le nombre d'occurrences de connecteurs binaires ($b(A) \geq 0$). Soit $L(A)$ la longueur de la formule A définie comme le nombre de ses symboles. Ainsi par exemple, pour $A = ((\neg p) \vee q)$, on a $L(A) = 8$. Démontrer par récurrence sur le nombre global de connecteurs de A, que $L(A) = 4 \times b(A)\ +\ 3 \times n(A)\ +\ 1$.

2 Logique Propositionnelle: Sémantique

Exercice 5

Que peut-on dire des formules suivantes ? Sont-elles satisfiables ? Valides ? Insatisfiables ? Utiliser pour chacune les tables de vérité.

1. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ 2. $((p \rightarrow q) \wedge (s \rightarrow m)) \rightarrow ((p \vee s) \rightarrow q)$

3. $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$ 4. $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$

Exercice 6

Un circuit électrique contenant seulement des interrupteurs *on-off* (quand l'interrupteur est dans la position "on", le courant passe, sinon, il ne passe pas) peut être représenté par un diagramme où chaque interrupteur est étiqueté par un littéral qui représente une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'interrupteur dans la position "on". Par exemple, considérons le circuit de la figure 1 : la condition dans laquelle le courant passe par ce circuit peut être donnée par la formule $(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p)$. Pour le circuit de la figure 2, la condition dans laquelle le courant passe peut être donnée par la formule $(p \wedge q) \vee ((r \vee p) \wedge \neg q)$. Or, cette formule est logiquement équivalente à la formule $p \vee (r \wedge \neg q)$ (comme on peut le vérifier par une table de vérité), donc le circuit de la figure 2 est équivalent au circuit plus simple de la figure 3, au sens suivant : deux circuits sont dits *équivalents* si le courant passe dans le premier si et seulement si il passe aussi dans le deuxième et un circuit est *plus simple* qu'un autre s'il contient moins d'interrupteurs.

Trouver des circuits équivalents à ceux des figures 4 et 5 et qui soient les plus simples possible.

Figure 1.

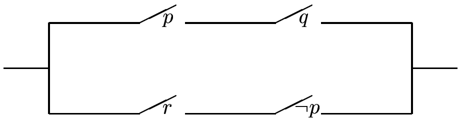


Figure 2.

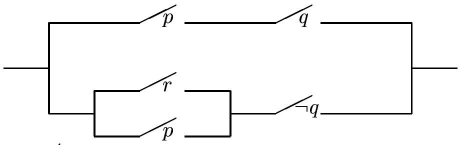


Figure 3.

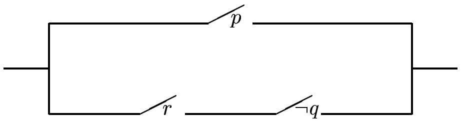


Figure 4.

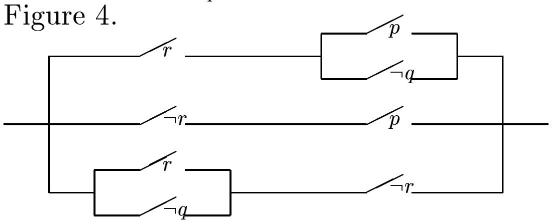
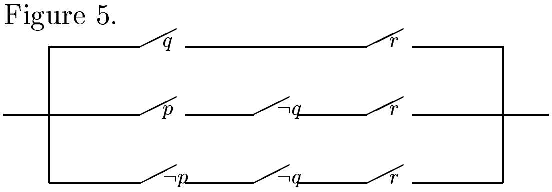


Figure 5.



Exercice 7

1. Montrer que $\neg p$ est une conséquence logique de $p \rightarrow m$ et $\neg m$.
2. Montrer que $\neg m$ n'est pas une conséquence logique de $p \rightarrow m$ et $\neg p$.
3. Soit $P_1 = \neg(p \wedge q)$ et $P_2 = \neg p \vee \neg q$. Est-ce que P_i est une conséquence logique de P_j (pour $(i, j) \in \{1, 2\}^2$) ?
4. Même question pour $P_1 = p \vee (q \wedge r)$ et $P_2 = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Exercice 8

Pour chacune des formules ci-dessous, indiquer une formule logiquement équivalente et telle que :

- Les seules variables propositionnelles utilisées sont p et q.
- Les seuls connecteurs sont $\neg$ et $\vee$.

1. $p \wedge q$ 2. $p \rightarrow q$ 3. $p \leftrightarrow q$ 4. $\neg(p \leftrightarrow q) \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow p))$

Exercice 9*[1]

L'ensemble de connecteurs $\{\neg, \vee\}$ est *fonctionnellement complet* : il suffit à exprimer toute fonction de vérité (voir le polycopié et l'exercice précédent). Par contre, l'ensemble $\{\neg, \leftrightarrow\}$ ne l'est pas. Le démontrer, en montrant qu'il n'existe pas de formule A telle que :

1. Les lettres propositionnelles de A sont p et q.
2. Les seuls connecteurs de A sont $\neg$ et $\leftrightarrow$.
3. A est logiquement équivalente à $p \wedge q$.

[1] Le * indique qu'il s'agit d'un exercice plus difficile que les autres