TD 1 bis de Logique – Licence d'Informatique - IUP2 2000 / 2001

Exercice 1

Un graphe G (non vide) non orienté avec n sommets peut être spécifié par un ensemble $S = \{s_1, ..., s_n\}$, où $n > 0$ (l'ensemble des sommets) et un ensemble de paires de sommets (les arcs). Si k est un nombre naturel positif, et $C = \{c_1, ..., c_k\}$ sont k couleurs, on dira qu'un graphe G est *k-coloriable* si et seulement si on peut colorier chaque sommet avec une couleur de C de façon que, s'il existe un arc entre deux sommets (pouvant éventuellement être identiques), alors ces deux sommets ont des couleurs différentes.

Par exemple, si on a exactement deux sommets, s_1 et s_2 et un arc entre s_1 et s_2 le graphe n'est pas 1-coloriable mais il est toujours k-coloriable pour $k > 1$.

Dans cet exercice, nous considérons un graphe G non orienté avec exactement trois sommets, s_1, s_2, s_3 (i.e. n=3) et le cas de deux couleurs, disons rouge et vert (i.e. $k = 2$). Soit L un langage propositionnel L contenant les lettres propositionnelles $rouge_1$, $rouge_2$, $rouge_3$, $vert_1$, $vert_2$, $vert_3$. Soit ${G^3}_2$ la formule de la forme $(A \wedge B) \wedge C$ où :

- $A = ((rouge_1 \vee vert_1) \wedge (rouge_2 \vee vert_2)) \wedge (rouge_3 \vee vert_3)$
- $B = (B_1 \wedge B_2) \wedge B_3)$ où :

$$B_1 = (rouge_1 \rightarrow \neg vert_1) \wedge (vert_1 \rightarrow \neg rouge_1)$$

$$B_2 = (rouge_2 \rightarrow \neg vert_2) \wedge (vert_2 \rightarrow \neg rouge_2)$$

$$B_3 = (rouge_3 \rightarrow \neg vert_3) \wedge (vert_3 \rightarrow \neg rouge_3)$$

- Soit $C_{i,j}$ une formule de la forme : $(rouge_i \rightarrow \neg rouge_j) \wedge (vert_i \rightarrow \neg vert_j)$.
  La formule C est la conjonction de toutes les $C_{i,j}$ telles que G contient un arc entre le sommet s_i et le sommet s_j.

Questions

1. Montrer que si G est 2-coloriable (par les couleurs rouge et vert) alors la formule ${G^3}_2$ est satisfiable.
2. Montrer que si la formule ${G^3}_2$ est satisfiable, alors G est 2-coloriable (par les couleurs rouge et vert).

Exercice 2

Généraliser la construction de l'exercice 3, en indiquant comment construire, quelque soit le nombre n de sommets d'un graphe G et le nombre k de couleurs, une formule ${G^n}_k$ telle que ${G^n}_k$ soit satisfiable si et seulement si le graphe G est k-coloriable.

Exercice 1.

Intuitivement, le rôle de la formule A est de dire que chaque sommet a au moins une couleur, celui de B est de dire que chaque sommet a au maximum une couleur, et celui de C de dire que deux sommets reliés par un arc ont des couleurs différentes. Ci-dessous, la réponse précise aux deux questions est donnée.

1. Supposons que G soit 2-coloriable (avec rouge et vert). Soient 1,2,3 les trois sommets de G, et soit $Col(G)$ une coloration des sommets qui permet de conclure que G est 2-coloriable. Construisons une interprétation de I de ${G^3}_2$ telle que, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $I(rouge_i) = V$ ssi $Col(G)$ est telle que i est rouge, $I(rouge_i) = F$ ssi $Col(G)$ est telle que i n'est pas rouge, $I(vert_i) = V$ ssi $Col(G)$ est telle que i est vert, et I$(vert_i) = F$ ssi $Col(G)$ est telle que i n'est pas vert.

   Ainsi, pour chaque i, exactement une des deux lettres propositionnelles $rouge_i$ et $vert_i$ reçoit la valeur de vérité V, selon cette interprétation.
   Il en suit que I est un modèle de A car, pour chaque i, au moins une lettre parmi $rouge_i$ et $vert_i$ a la valeur V.
   L'interprétation $\mathcal{I}$ est aussi un modèle de B, car, pour chaque i, aux maximum une lettre parmi $rouge_i$ et $vert_i$ a la valeur V, ce qui implique que $rouge_i \wedge vert_i$ reçoit la valeur F.
   Enfin, observons que, puisque la coloration $Col(G)$ est telle que deux sommets i et j (pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$) reliés par un arc n'ont jamais la même couleur, I est telle que si $I(rouge_i) = V$ et il y a un arc entre i et j, alors $I(rouge_j) = F$; de même, si $I(vert_i) = V$ et il y a un arc entre i et j, alors $I(vert_j) = F$. Or, puisque, par construction de C, une formule $C_{i,j}$ est une sous-formule de C si et seulement si il y a un arc entre i et j, il en suit que I est un modèle de C.

2. Soit G un graphe quelconque avec trois sommets 1,2,3 et soit I un modèle quelconque de ${G^3}_2$. Soit $Col(G)$ une coloration de G telle que, quelque soit le sommet i, $Col(G)$ colore i en rouge ssi $I(rouge_i) = V$ et colore i en vert ssi $I(vert_i) = i$. Cette coloration est “bien définie” car, puisque I est un modèle de B, tout sommet a au maximum une couleur. Elle est une coloration de chaque sommet car I est un modèle de A. La coloration est telle que deux sommets i et j reliés par un arc n'ont jamais la même couleur car I est un modèle de C. On peut donc conclure que G est 2-coloriable.

Exercice 2

Soit L un ensemble de lettres propositionnelles contenant $n \times k$ lettres propositionnelles $p_{s,c}$, où $1 \leq s \leq n$ et $1 \leq c \leq k$. Intuitivement, le rôle de chaque lettre $p_{s,c}$ est de dire que le sommet s a la couleur c (on identifie une couleur avec le nombre qu'elle reçoit dans une énumération quelconque des éléments de l'ensemble des couleurs). Ci-dessous, la notation $\vee_{1 \leq i \leq q} F_i$ indique la disjonction $F_1 \vee ... \vee F_q$; la notation $\wedge_{1 \leq i \leq q} F_i$ est analogue. La formule ${G^n}_k$ est la conjonction de ${A^n}_k$, ${B^n}_k$, ${C^n}_k$, où :

- Pour un s donné, $1 \leq s \leq n$, la formule D_i est définie par :$D_i = \vee_{1 \leq c \leq k}\ p_{s,c}$. La formule ${A^n}_k$ est définie par : ${A^n}_k = \wedge_{1 \leq s \leq n}\ D_s$.
- Pour un s donné, $1 \leq s \leq n$, et un c donné, $1 \leq c \leq k$, la formule $E_{s,c}$, est définie par :$E_{s,c} = p_{s,c} \rightarrow \wedge_{1 \leq c' \leq k, c' \neq c} \neg p_{s,c'}$. La formule ${B^n}_k$ est définie par : ${B^n}_k = \wedge_{1 \leq s \leq n, 1 \leq c \leq k}\ E_{s,c}$.
- Pour i et j donnés, $1 \leq i, j \leq n$ et un c donné, $1 \leq c \leq k$, la formule $F_{i,j,c}$ est définie par : $F_{i,j,c} = p_{i,c} \rightarrow \neg p_{j,c}$. Pour i et j donnés, la formule $H_{i,j}$ est définie par : $H_{i,j} = \wedge_{1 \leq c \leq k}\ F_{i,j,c}$. La formule ${C^n}_k$ est la conjonction de toutes les formules $H_{i,j}$ telles que i et j sont reliés par un arc dans le graphe G.