TD 2 de Logique – Licence - IUP2 2000 / 2001

Systèmes de Preuve "Directs" : Calculs des séquents

1 Séquents

Exercice 1
Considérez les deux systèmes de preuve possibles suivants pour la logique propositionnelle avec $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ comme connecteurs :

1. On a un schéma d'axiome :

$$\frac{}{A \rightarrow A}$$

   où A est une formule quelconque, et un schéma de règle d'inférence :

$$\frac{A}{B}$$

   où A et B sont des formules quelconques.

2. On a un schéma d'axiome, le même que pour le système ci-dessus, et une seule autre règle d'inférence :

$$\frac{A \rightarrow B, \qquad A}{B}$$

   où A et B sont des formules quelconques.

Pour chacun de ce deux systèmes, répondre aux questions suivantes :

- est-il correct par rapport à la validité ?
- est-il complet par rapport à la validité ?

Justifiez vos réponses.

Exercice 2
Pour chacun des séquents suivants, indiquer la formule associée. Préciser quels séquents sont valides.

1. $(p \vee q) \rightarrow r, \neg(p \wedge z) \vdash \neg p, \neg z$
2. $\vdash (r \wedge s), q$
3. $(p \vee q) \rightarrow r, \neg(p \vee z) \vdash$
4. $\vdash$
5. $\mathcal{F} \vdash$

2 Le système LK

Exercice 3
Donnez des preuves des séquents suivants dans le système **LK**. En sachant que le système **LK** est *correct*, c.-à-d. que les séquents ayant des preuves en **LK** sont tous valides, conclure sur la validité éventuelle des formules associées.

1. $\vdash\ p \to (q \to (r \to (s \to p)))$
2. $\vdash\ (\neg p \land p) \to ((p \lor r) \land s \land m)$
3. $\vdash\ (p \to q) \lor \neg(p \to q)$
4. $\vdash ((\neg p \lor p) \to (\neg r \land r) \land p \land p)$
5. $\vdash p \to (q \to (r \to (s \to m)))$

Exercice 4
Une règle d'un calcul des séquents est dite *correcte* si la formule associée au séquent conclusion est une conséquence logique de l'ensemble des formules associées aux séquents prémisses.

Toutes les règles de **LK** sont correctes (et de même pour **G**). Le démontrer, dans le cas des axiomes et des règles $\to$-gauche et $\neg$-gauche.

3 Le système G

Exercice 5
Reprendre exercice **??** et donner des preuves des formules dans les système **G**. Indiquez toujours les différences aux preuves faites à l'exercice **??** dans le système **LK**.

Exercice 6

1. Rajouter au calcul des séquents **G** une règle droite et une règle gauche pour le connecteur $\leftrightarrow$ qui soient correctes (et même réversibles).
2. Démontrer maintenant l'équivalence logique $\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$ à l'aide de la nouvelle version du calcul **G** contenant ces nouvelles règles.

Exercice 7

1. Montrer que le schéma d'axiome $\overline{\Gamma, A \vdash A, \Delta}$ de **G** est *dérivable* dans **LK**, i.e. il existe une preuve de ce séquent dans **LK**.
2. De même, prouver que la règle droite pour $\lor$ de **G** est dérivable dans **LK**, i.e. s'il existe une preuve dans **LK** de $\Gamma \vdash A, B, \Delta$ alors il existe une preuve dans **LK** de $\Gamma \vdash A \lor B, \Delta$
3. En sachant que **G** est complet (comme prouvé en cours) que peut on conclure sur la completude de **LK** ?