TD 3 de Logique – Licence - IUP2 2000 / 2001

Formes Normales, Résolution Propositionnelle

Definitions

- Un littéral est ou bien une formule atomique ou bien la négation d'une formule atomique.
- Une clause est une formule de la forme $l_1 \vee ... \vee l_m$ où $m > 0$, et chaque l_i est un littéral.
- Une formule F est dite en forme normale conjonctive (noté f.n.c.) si elle est de la forme $D_1 \wedge ... \wedge D_k$, où $k > 0$ et chaque D_i est une clause.
- Une conjonction élémentaire est une formule de la forme $l_1 \wedge ... \wedge l_n$ où $n > 0$ et chaque l_i est un littéral.
- Une formule F est dite en forme normale disjonctive (noté f.n.d.) si elle est de la forme $C_1 \vee ... \vee C_q$ où $q > 0$ et chaque C_i est une conjonction élémentaire.

Exercice 1

À l'aide de la loi de double négation, les lois de Morgan et les lois de distributivité, mettre sous forme normale conjonctive et disjonctive les formules suivantes

1. $(\neg p \vee q \vee r) \rightarrow (r \vee r)$
2. $p \rightarrow ((\neg q \vee r) \rightarrow s)$
3. $\neg(p \vee \neg q) \wedge (q \rightarrow (p \vee p))$
4. $(p \leftrightarrow q) \wedge (\neg(p \rightarrow q) \vee \neg(q \rightarrow p))$
5. $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \wedge \neg(q \rightarrow p)$

Exercice 2

Est-il possible d'avoir une formule qui soit simultanément en forme normale conjonctive et disjonctive ? Justifier.

Étant donné une formule F, est-ce vrai que toutes ses formes normales conjonctives ont le même nombre de clauses ? Est-ce vrai si on ne permet pas de répétitions de clauses dans une forme normale conjonctive ?

Exercice 3

Montrer que toute formule F admet une forme normale conjonctive et une forme normale disjonctive (suggestion : montrer cette propriété par récurrence sur le nombre de connecteurs de F).

Exercice 4

Déduire de l'exercice 3 un algorithme qui calcule la forme normale conjonctive (resp. disjonctive) d'une formule quelconque.

Exercice 5

Est-ce qu'on peut utiliser le calcul des séquents **G** pour calculer la forme normale conjonctive (resp. disjonctive) d'une formule ? Si oui, le faire pour les deux premières formules de l'exercice 1.

Exercice 6

a) Etant donné un ensemble E de formules propositionnelles, montrer qu'il existe un ensemble C_E de clauses tel que E est satisfiable si et seulement si C_E est satisfiable.

b) Soient E_1 et E_2 les ensembles de formules suivants :

$$E_1 = \{p \leftrightarrow q, \neg(p \to q) \vee \neg(q \to p)\} \qquad\qquad E_2 = \{p \to q, \neg q, \neg(q \to p)\}$$

- Construire les ensembles de clauses associés.
- Chercher une réfutation pour chacun de ces ensembles.

Exercice 7

Pour les ensembles de formules C et F suivants, est-ce que F est une conséquence logique de C ? Si oui donner une preuve par résolution, sinon donner une interprétation qui est modèle de C mais pas de F.

- $C = \{p \vee p, \neg p \vee \neg p\}$
- $C = \{a \vee \neg b \vee c, \neg a \vee c, a \vee b \vee e, \neg c \vee e\}, F = e$.
- $C = \{\neg p \vee \neg q \vee r, p, q\}, F = s$.
- $C = \{\neg q \vee p, \neg p \vee r \vee q, \neg p \vee \neg q, p \vee \neg t, \neg p \vee \neg r, p \vee q \vee s \vee t, p \vee \neg s \vee t\}, F = t$.

Exercice 8

En utilisant la résolution propositionnelle montrer que la formule suivante est valide :

$$(P \to Q) \to \Big[(P \to (Q \to R)) \to (P \to R)\Big]$$