TD 6 de Logique – Licence - IUP2 2000 / 2001
Calcul des prédicats du premier ordre.

1 Syntaxe du calcul des prédicats du premier ordre.

Exercice 1 : Notions de Base

Soient p, q deux symboles de prédicats binaires, h un symbole de prédicat unaire, f un symbole de fonction unaire, a un symbole de fonction 0-aire et g un symbole de fonction ternaire.
Soit la formule du calcul des prédicats suivante :

$$F = \exists x\, p(x, f(y)) \vee \neg\forall y\, q(y, g(a, z, h(z)))$$

1. Donner tous les termes.
2. Donner toutes les sous-formules.
3. Donner les variables libres et les variables liées de F
4. F est-elle close ?
5. Y-a-t-il des constantes ?

Exercice 2 : Syntaxe du calcul des prédicats

Écrire la grammaire, en utilisant, selon votre choix, soit les grammaires algébriques soit les BNF, de `terme` et `formule`.

2 Sémantique du calcul des prédicats du premier ordre.

Exercice 3 : Formalisation

Traduire les énoncés suivants en calcul des prédicats du premier ordre, en utilisant les symboles de prédicat suivants :

$h(x)$	:	x est un homme	$a(x,y)$	:	x aime y
$m(x)$	:	x est méchant	$p(x)$	:	x est une personne
$chat(x)$	:	x est un chat	$diff(x,y)$	:	x est différent de y

1. Il existe un homme méchant.
2. Il n'existe pas d'homme méchant.
3. Tous les hommes sont méchants.
4. Parmis les personnes, seuls les hommes sont méchants.
5. Les personnes qui aiment les chats, ne sont pas méchantes.
6. Chaque personne aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde ou bien quelqu'un aime tout le monde et quelqu'un n'aime personne.
7. Il y a des personnes qui n'aiment que les chats.

Exercice 4 : Évaluation dans des interprétations

Soit la structure $S = \langle D, Fonctions, Relations \rangle$ où :
$D = \{a, b, c\}$;
$Fonctions$: contient seulement une fonction unaire, qui donne la valeur a pour l'argument a et la valeur c pour les arguments b et c ;
$Relations = \{\{\langle a, c\rangle\}, \{a\}, \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle\}\}$.

On considère un langage $\mathcal{L}$, où $F = \{f\}$ avec f unaire, et $R = \{P\}$ avec P binaire, et l'interprétation $\mathcal{I}$ de $\mathcal{L}$ par rapport à S où
$\mathcal{I}(f)$ est la seule fonction de S et
$\mathcal{I}(P) = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle\}$.
Évaluer par rapport à $\mathcal{I}$ et à un choix de valeurs ch tel que $ch(y) = a$ et $ch(v) = b$ pour toute autre variable v,

les termes		les formules	
$f(y)$	$f(f(y))$	$\varphi_0 = \forall x P(x, y)$	$\varphi_2 = \exists x P(f(x), f(y))$
$f(x)$	$f(f(f(y)))$	$\varphi_1 = \exists x \forall y P(x, y)$	

Exercice 5 : Logique et Bases de Données.

Préliminaires

Une base de données relationnelle est un ensemble de relations, présentées sous forme de "tables" ; chaque colonne d'une table a un nom, dit *attribut*. Par exemple, la table suivante correspond à une relation, nommée "vol", portant sur 3 arguments $n, v1, v2$ telle que "vol(n, v_1, v_2)" est vraie ssi l'avion numéro n part de la ville $v1$ et arrive à la ville $v2$ *sans faire d'escale intermédiaire*.

numéro-vol	v-départ	v-arrivée
af123	paris	rome
af124	paris	rome
ai162	rome	athènes
ai163	rome	athènes
bi421	londres	paris

Une *requête* est, intuitivement,
une question que l'on posepour interroger la base
Exemple **:**
Requête R_0 : Quels vols permettent d'aller de Paris à Rome ?

Dans ce problème, on considérera une base de données $\mathcal{B}$ contenant la table vol indiquée ci-dessus.

Le langage dit *calcul à variable domaine* est un des langages principaux permettant l'écriture des requêtes pour les bases de données relationnelles. Écrire des requêtes en calcul à variable domaine revient à écrire des formules du calcul des prédicats définissant des relations. Plus précisément, soit $\mathcal{L}_\mathcal{B}$ un langage du calcul des prédicats tel que :

1. Les constantes sont toutes les chaînes de caractères (et uniquement celles-ci) qui apparaissent dans une colonne d'au moins une table de la base $\mathcal{B}$ (par exemple : "londres", "af123", etc.).
2. Il n'existe pas de symboles de fonction à plus de 0 arguments.
3. On a un unique symbole de relation "vol" qui prend 3 arguments.

La base de données $\mathcal{B}$ peut être alors vue comme une interprétation d'Herbrand $I_\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}$:
- le domaine est CONST ;
- les tables indiquent les valeurs pour le symboles de relations. Ici, par ex. "vol(af123, paris, rome)" est vrai mais "vol(af123,londres,paris)" est faux.

Les requêtes peuvent alors s'écrire comme des formules de $\mathcal{L}$.
Exemple La requête R_0 peut être exprimée par la formule F_0 suivante : $F_0 = vol(x, paris, rome)$

Questions

Pour chacune requêtes suivantes, écrire une formule de $\mathcal{L}$ l'exprimant, si ceci est possible ; sinon, expliquer brièvement pourquoi ce n'est pas possible. (NB. L'utilisateur posant la requête ne connaît pas forcément le contenu des tables, mais juste leur "forme" ; par exemple, l'utilisateur ne connaît pas le nombre de lignes d'une table).

1. Quels vols mènent à Athènes ?
2. D'où part et où arrive le vol ai162 ?
3. Quelles villes peuvent être atteintes à partir de Londres en faisant exactement une escale ?

4. Quelles villes peuvent être atteintes à partir de Londres en faisant au maximum une escale ?
5. Quelles villes peuvent être atteintes à partir de Londres en faisant au maximum deux escales ?
6. Quelles villes peuvent être atteintes à partir de Londres en faisant éventuellement des escales ?

Exercice 6 : Satisfiabilité, Validité, Conséquence logique

1. Pour chacune des formules suivantes quelles sont celles qui sont satisfiables, valides, insatisfiables :
   - $\forall x\,(p(x) \vee \neg p(x))$
   - $\forall x\, p(x) \rightarrow p(z)$
   - $\forall x\, \forall y\,(p(x) \leftrightarrow \neg p(y))$
   - $\forall x\, p(x) \rightarrow \neg p(z)$
2. Soient les formules :
   - $F_1 = \forall x\, p(x, x)$
   - $F_2 = \forall x\, \forall y\,(p(x, y) \rightarrow p(y, x))$
   - $F_3 = \forall x\, \forall y\, \forall z\,((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z))$

Montrer qu'aucune de ces formules n'est conséquence logique des deux autres. Quel est le sens intuitif de chacune de ces formules ?

1. Montrer que :

   (a) $\exists y\, \forall x\, p(y, x) \models \forall x\, \exists y\, p(y, x)$

   (b) $\forall x\, \exists y\, p(y, x) \not\models \exists y\, \forall x\, p(y, x)$

   (c) $p(x) \not\models \forall x\, p(x)$.

   (d) $\neg(\forall x\, F) \equiv \exists x\, \neg F$.

   (e) $\exists x\, F \vee F' \equiv \exists x\,(F \vee F')$

   (f) En général, $\forall x\,(F \vee G) \not\equiv \forall x\, F \vee \forall x\, G$, mais $\forall x\,(F \vee G) \equiv \forall x\, F \vee \forall x\, G$ si $x \notin Varlib(G)$.