TD 7 de Logique – Licence - IUP2 2000 / 2001

Systèmes de Preuve du Calcul des Prédicats du Premier Ordre : Calculs des Séquents

Exercice 1

1. Donner des arbres de preuve, d'abord dans **LK**, puis dans **G**, des séquents suivants. En sachant que **LK** et **G** sont corrects, conclure sur la validité des formules associées.

   (a) $\vdash\ (\exists x\ (p(x) \vee q(y)) \to \exists x\ p(x) \vee q(y)) \wedge (\exists x\ p(x)\ \vee\ q(y)) \to (\exists x\ (p(x)\ \vee\ q(y)))$

   (b) $\vdash\ (\forall x\ (p(x)\ \to\ q(y)) \to [\exists x\ p(x)\ \to\ q(y))] \wedge (\exists x\ p(x)\ \to\ q(y)) \to [(\forall x\ (p(x)\ \to\ q(y)))$

   (c) $\vdash \forall y\ r(y,y)\ \to\ \forall z\ r(z,z)$

   (d) $\vdash\ \exists x\ (p(x)\ \to\ \forall y\ p(y))$

   NB : Utiliser exclusivement les règles des deux calculs et la *définition* de l'opérateur $\exists$:

   $$\exists x\ A\ =_{df} \neg\forall x \neg A$$

2. Est-il vrai que, lorsqu'on cherche une preuve dans **LK** l'ordre des applications des règles pour $\forall$ n'a aucune importance ? Et pour **G** ? (*Suggestion* : considérez votre réponse à la question 1c).

3. Que peut-on conclure (sans utiliser la correction et la completude des deux calculs) sur la prouvabilité d'un séquent quelconque de la forme

   $$\vdash (\exists x\ (A\ \vee\ B) \to \exists x\ A\ \vee\ B)\ \wedge (\exists x\ A\ \vee\ B) \to (\exists x\ (A\ \vee\ B)$$

   obéissant à la contrainte : x n'est pas libre dans B ? Et si on relâche cette dernière contrainte ?

Exercice 2

1. Le séquent

   $$\exists x\ \forall y\ r(x,y) \vdash \forall z\ r(z,z)$$

   est-il valide ? Justifiez votre réponse, avec des argumentations sémantiques. L'arbre d'expressions suivant, est-il une preuve dans **G** de ce séquent ? Justifiez votre réponse en vous appuyant exclusivement sur la définition du calcul **G**.

   $$\begin{prooftree}
   \AxiomC{}
   \RightLabel{Ax}
   \UnaryInfC{$r(y,y), \vdash\ r(y,y)$}
   \RightLabel{$\forall\ g$}
   \UnaryInfC{$\forall y\ r(y,y), \vdash\ r(y,y)$}
   \RightLabel{$\forall\ d$}
   \UnaryInfC{$\forall y\ r(y,y), \vdash\ \forall z\ r(z,z)$}
   \RightLabel{$\neg\ d$}
   \UnaryInfC{$\vdash\ \neg\forall y\ r(y,y),\ \forall z\ r(z,z)$}
   \RightLabel{$\forall\ d$}
   \UnaryInfC{$\vdash\ \forall x\ \neg\forall y\ r(x,y),\ \forall z\ r(z,z)$}
   \RightLabel{$\neg\ g$}
   \UnaryInfC{$\neg\ \forall x\ \neg\forall y\ r(x,y)\ \vdash\ \forall z\ r(z,z)$}
   \end{prooftree}$$

2. Le séquent

$$\exists x\ p(x) \ \vdash\ \forall y\ p(y)$$

est-il valide ? Justifiez votre réponse, avec des argumentations sémantiques. L'arbre d'expressions suivant, est-il une preuve dans **G** de ce séquent ? Justifiez votre réponse en vous appuyant exclusivement sur la définition du calcul **G**.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p(x)\ \vdash\ p(x)}\ Ax}{\vdash\ \neg p(x),\ \ p(x)}\ \neg\ d}{\vdash\ \forall x\ \neg p(x),\ \ p(x)}\ \forall\ d}{\vdash\ \forall x\ \neg p(x),\ \forall y\ p(y)}\ \forall\ d}{\neg\ \forall x\ \neg p(x)\ \vdash\ \forall y\ p(y)}\ \neg\ g$$

Exercice 3
Soit A la formule $\forall x\ (p(x)\ \rightarrow \forall z\ q(z, f(y)))$.

1. Le terme $g(z)$ est-il libre par rapport à y dans A ? La formule $\forall x\ (p(x)\ \rightarrow \forall z\ q(z, f(g(z))))$, est-elle obtenue par une substitution *legale* de y par $g(z)$ dans A ?

2. Même question pour le terme $g(a)$, où a est une constante.

3. Le terme $g(z)$ est-il libre par rapport à z dans A ? Qui est la formule obtenue à partir de A par une substitution de z par $g(z)$?

Exercice 4
Ajouter aux règles de **G** une règle gauche et une règle droite pour $\exists$ qui soient réversibles. Justifiez votre réponse. Utilisez le système obtenu pour donner une preuve syntaxique de la validité de la formule $\forall x\ \forall y\ r(x, y)\ \rightarrow \exists x\ r(x, x)$

Exercice 5
Montrer que la règle gauche pour $\forall$ de **G** est une régle dérivable dans **LK**.

Exercice 6
Utiliser le système **G** pour chercher des arbres de preuve des séquents suivants. En cas d'échec, inspirez vous à l'arbre que vous venez d'écrire pour définir une intérpretation qui montre que le séquent en question n'est pas valide. Dans les deux séquents, **0** est une constante, s est un symbole de fonction unaire, p un symbole de prédicat unaire.

1. $p(\mathbf{0})\ \wedge\ \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x)))\ \vdash\ p(s(s(s(\mathbf{0}))))$

2. $p(\mathbf{0})\ \wedge\ \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x)))\ \vdash\ \forall y\ p(y)$

Exercice 7
Discuter les difficultés éventuelles que l'on pourrait rencontrer en essayant d'écrire un programme qui teste s'il existe une preuve dans **G** d'un séquent du calcul des prédicats du premier ordre fourni en entrée.