TD 8 de Logique – Licence - IUP2 2000 / 2001

Systèmes de Preuve du Calcul des Prédicats du Premier Ordre : Méthode de Résolution

1 Mise en Forme Clausale

Exercice 1
Soient les formules suivantes :

1. $F_1 = \forall x(P(x) \to \exists y \forall x Q(x,y))$
2. $F_2 = ((\exists x(P(x) \to R(x) \vee \forall y P(y))) \wedge \forall x \exists y(R(y) \to P(x)))$
3. $F_3 = (((\forall x P(x) \to \exists y Q(y)) \to \exists z R(z)) \to \exists u S(u))$

Mettre l'ensemble des formules $E = \{F_1, F_2, F_3\}$ sous forme clausale.

2 Substitutions et Unification

Exercice 2

- Soit p un symbole de prédicat à 2 arguments. On considère l'atome $F = p(X,Y)$ et les substitutions $\sigma_1 = \{X \to f(a)\}$ et $\sigma_2 = \{Y \to f(X)\}$.
  - Calculer: $\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_2\sigma_1$, $(F)_{\sigma_1}$, $(F)_{\sigma_2}$, $(F)_{\sigma_1\sigma_2}$ et $(F)_{\sigma_2\sigma_1}$
    Est-il vrai que $(F)_{\sigma_1\sigma_2} = ((F)_{\sigma_1})_{\sigma_2}$? Est-il vrai que $(F)_{\sigma_1\sigma_2} = (F)_{\sigma_2\sigma_1}$?
- Soit $\sigma_1 = \{X \to Y\}$ et soit $\sigma_2 = \{Y \to X\}$. Calculer $\sigma_1\sigma_2$.
- Soit r un symbole de prédicat à 3 arguments. On considère l'atome $F = r(X,Y,Z)$ et les substitutions

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1 & = & \{X \to f(a), Y \to f(X), Z \to b\} \\ \sigma_2 & = & \{X \to f(Z), Y \to f(b), Z \to b\} \\ \sigma_3 & = & \{W \to Z, Z \to b\}\{X \to f(W), Y \to a\} \end{array}$$

  Calculer $(F)_{\sigma_1}$, $(F)_{\sigma_2}$ et $(F)_{\sigma_3}$

Exercice 3
Soit le problème d'unification $\{f(h(X,Y)) = f(Z), Z = h(a,W)\}$. Donner 3 unificateurs distincts de ce problème. Donner son unificateur principal σ et indiquer comment obtenir les trois unificateurs précédents à partir de σ.

Exercice 4
Soit p un symbole de prédicat ternaire et q un symbole de prédicat binaire. Calculer, s'il existe, l'unificateur principal de chacune des paires d'atomes (A_1, A_2)

suivantes en appliquant l'algorithme d'unification donné dans le polycopié.

$A_1 : p(a, X, f(g(Y)))$	$A_2 : p(Z, f(Z), f(U))$
$A_1 : q(f(a), g(X))$	$A_2 : q(Y, Y)$
$A_1 : p(X, f(Y, Z))$	$A_2 : p(X, g(h(k(X))))$
$A_1 : p(X, f(U, X))$	$A_2 : p(f(Y, a), f(Z, f(b, Z)))$
$A_1 : p(X, f(X), g(f(X), X))$	$A_2 : p(Z, f(f(a)), g(f(g(a, Z)), V))$
$A_1 : p(f(g(X, Y)), g(V, W), Y)$	$A_2 : p(f(Z), X, f(X))$
$A_1 : p(X, f(X), f(f(X)))$	$A_2 : p(f(f(Y)), Y, f(Y))$
$A_1 : p(f(Y), f(Z), f(T), f(X))$	$A_2 : p(g(Z), g(X), g(Y), g(Z))$

3 Preuves par Résolution

Exercice 5

Utiliser la méthode de résolution pour prouver que toute relation binaire symétrique, transitive et totale est reflexive.

Exercice 6

- Nécessité de l'*occur check* :
  - Donner un modèle de la formule $\forall X E(X, X) \wedge \forall Y \neg E(Y, f(Y))$
  - Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant :
    On applique l'algorithme d'unification à $L_1 = E(X, X)$ et $L_2 = E(Y, f(Y))$. A la première étape, on trouve $\sigma = \{X/Y\}$. Puis on continue sur $E(Y, Y)$ et $E(Y, f(Y))$. On trouve le m.g.u $\{X/Y, Y/f(Y)\}$. Donc, L_1 et L_2 sont unifiables, et on obtient la clause vide par résolution.
- Nécessité de *renommer* :
  - Soit la formule $\forall X (P(X) \wedge \neg P(f(X)))$. Montrer qu' elle est insatisfiable en raisonnant sur les interprétations.
  - Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant : Puisqu'on ne peut pas unifier $P(X)$ et $P(f(X))$ à cause de l'occur check, on ne peut pas déduire la clause vide par résolution à partir de $\{P(X),\ \neg P(f(X))\}$, et donc l'ensemble de formules est insatisfiable.