EXERCICE1 : Q1>

$$||[a]tt|| = S$$

cette formule est tautologique, elle est donc valide dans tous les états

$$||\langle a\rangle ff|| = \{s | \exists s' \in S, (s, a, s') \in T\}$$

cette formule est vrai dans tous les états où on peut faire une transition par a

$$||[a]ff|| = ||\neg\langle a\rangle tt|| = S \setminus ||\langle a\rangle tt||$$

l'inverse de la précédente i.e les états où on ne peut pas faire aucune transition par a

$$||\langle tt\rangle tt|| = \{s | \exists s' \in S, \exists x \in A, (s, x, s') \in T\}$$

les états qui contiennent une transition

$$||[tt]ff|| = S \setminus ||\langle tt\rangle tt||$$

l'inverse de la précédente i.e les états où on ne peut pas faire aucune transition (blocage)

$$||\langle a\rangle ff|| = \emptyset$$

cette formule est une contradiction car on ne peut pas faire une action et ne pas y aller dans un état

$$||\langle ff\rangle tt|| = \emptyset$$

cette formule est une contradiction on ne pas faire une transition qu'avec une action du système

EXERCICE1 : Q2>

$\langle a\rangle\varphi$ vs. $\neg[a]\neg\varphi$ / $[a]\varphi$ vs $\neg\langle a\rangle\neg\varphi$

$$
\begin{aligned}
\|[\alpha]\varphi\| &= \{s\in S \mid \forall s \xrightarrow{a} s',\ a\in\|\alpha\| \Rightarrow s'\in\|\varphi\|\} \\
&= \{s\in S \mid \forall s \xrightarrow{a} s',\ a\notin\|\alpha\| \vee s'\in\|\varphi\|\} \\
&= \{s\in S \mid \neg\neg \text{————————} \} \\
&= \{s\in S \mid \neg\exists s \xrightarrow{a} s',\ a\in\|\alpha\| \wedge s'\notin\|\varphi\|\} \\
&= S \setminus \{s\in S \mid \exists s \xrightarrow{a} s',\ a\in\|\alpha\| \wedge s'\in\|\neg\varphi\|\} \\
&= \neg\langle a\rangle\neg\varphi
\end{aligned}
$$

dans l'autre sens :

$$
\begin{aligned}
\|\neg\langle a\rangle\neg\varphi\| &= S\setminus\{s\in S \mid \exists s \xrightarrow{a} s',\ a\in\|\alpha\| \wedge s'\in\|\neg\varphi\|\} \\
&= S\setminus\{\text{————————} \wedge s'\in S\setminus\|\varphi\|\} \\
&= S\setminus\{\text{————————} \wedge s'\notin\|\varphi\|\} \\
&= \{s\in S \mid \nexists \text{————————}\} \\
&= \{s\in S \mid \neg\neg\forall s \xrightarrow{a} s',\ a\notin\|\alpha\| \vee s'\in\|\varphi\|\} \\
&= \{s\in S \mid \forall s \xrightarrow{a} s',\ a\in\|\varphi\| \Rightarrow s'\in\|\varphi\|
\end{aligned}
$$

EXERCICE 2

(a) $\|[a]\varphi_1 \wedge \varphi_2\| = \{s\in S \mid \forall s \xrightarrow{x} s'.\ x\in\|a\| \Rightarrow s'\in\|\varphi_1 \wedge \varphi_2\|\}$

(def $\|\wedge\|$) $= \{ \text{———} \Rightarrow s'\in\|\varphi_1\| \wedge s'\in\|\varphi_2\|\}$

($a\Rightarrow b\wedge c \equiv a\Rightarrow b \wedge a\Rightarrow c$) $= \{\cancel{s\in S} \mid \text{———} \Rightarrow s'\in\|\varphi_1\| \wedge \text{———} \Rightarrow s'\in\|\varphi_2\|\}$

de m̂

($\forall x.\ P(x)\Rightarrow Q(x) \wedge P(x)\Rightarrow R(x) \equiv \forall x\ P(x)\Rightarrow Q(x) \wedge \forall x\ P(x)\Rightarrow R(x)$)

$= \{s\in S \mid \forall s\xrightarrow{x} s'.\ x\in\|a\| \Rightarrow s'\in\|\varphi_1\|\}$

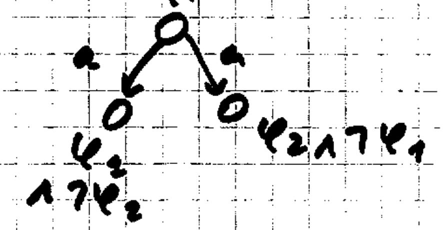
$\cap \{s\in S \mid \forall s\xrightarrow{x} s'.\ x\in\|a\| \Rightarrow s'\in\|\varphi_2\|\}$

$= \|[a]\varphi_1\| \cap \|[a]\varphi_2\|$

$= \|[a]\varphi_1 \wedge [a]\varphi_2\|$

(b) on peut montrer $\cancel{\Rightarrow}$ $\Leftarrow$ (ai faire)

contre ex $\cancel{\Leftarrow}$ $\Rightarrow$:

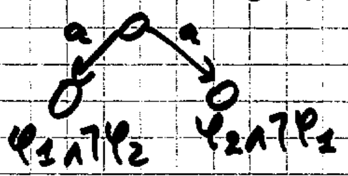


$\models [a]\varphi_1 \vee \varphi_2$

$\not\models [a]\varphi_1 \vee [a]\varphi_2$

(c) on peut montrer $\Rightarrow$ (à faire)

contre ex $\Leftarrow$:



$\models \langle a\rangle\varphi_1 \wedge \langle a\rangle\varphi_2$

$\not\models \langle a\rangle \varphi_1 \wedge \varphi_2$

(d) ~~$\langle a_1\rangle\varphi \vee \langle a_2\rangle\varphi \equiv \langle a_1 \vee a_2\rangle\varphi$~~

$[a_1]\varphi \wedge [a_2]\varphi \equiv [a_1 \vee a_2]\varphi$

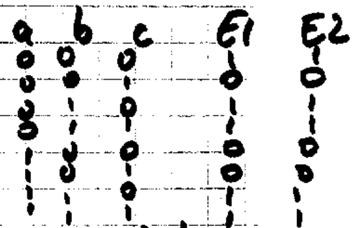
$\rightarrow \{s\in S \mid \forall s\xrightarrow{x} s'.\ x\in\|a_1\| \Rightarrow s'\in\|\varphi\|\}$

$\cap \{s\in S \mid \forall s\xrightarrow{x} s'.\ x\in\|a_2\| \Rightarrow s'\in\|\varphi\|\}$

$\rightarrow \{s\in S \mid \forall s\xrightarrow{x} s'.\ x\in\|a_1\| \Rightarrow s'\in\|\varphi\| \wedge x\in\|a_2\| \Rightarrow s'\in\|\varphi\|\}$

$\rightarrow \{s\in S \mid \forall s\xrightarrow{x} s'.\ (x\in\|a_1\| \vee x\in\|a_2\|) \Rightarrow s'\in\|\varphi\|\}$

$\rightarrow \{s\in S \mid \forall s\xrightarrow{x} s'.\ x\in\|a_1 \vee a_2\| \Rightarrow s'\in\|\varphi\|\} = [a_1 \vee a_2]\varphi.$



$a \Rightarrow b$
$\wedge\ c \Rightarrow b$ (E1)
$\equiv (a\vee c)\Rightarrow b$ (E2)

Exercice 4

$$[tt^*]\langle a\rangle tt$$

$$[tt^*]\langle tt^*\rangle\langle a\rangle tt$$

$$[tt^*]\langle b\rangle(\neg\langle tt^*\rangle\langle b\rangle tt \Rightarrow [(\neg a)^*]ff)$$

La quatrième phrase ne peut pas être écrite en RegHML.
Attention la formule suivante :

$$[tt^*]\langle b\rangle tt \Rightarrow [b][tt^*]\langle tt^*\rangle\langle a\rangle tt$$

exprime l'idée qu'une fois b est fait alors il est toujours possible dans le future de faire a. Ceci qui est différent de finira par arriver (a est inévitable)